

Драгослав<sup>1</sup> и Ђорђе<sup>2</sup> Херцег

## Решавање једначина и неједначина са и без рачунара

Једначине се решавају у свим разредима основне школе. У почетку, до петог разреда, посматрају се једначине са једном непознатом и решавају се само у скупу природних бројева и скупу који чине природни бројеви и нула. Кроз градиво и, сагласно томе, кроз уџбенике и збирке задатака једначине се понекад уводе без потребне прецизности и наглашавања појединих важних чињеница. То може да доведе до споријег прихватања једначина од стране ученика и осећања да ту има пуно „заплетених“ ствари. Једначине се често решавају тако што се посматра неки решени пример и затим се по аналогiji решава посматрана једначина.

У каснијим разредима основне школе једначине и неједначине са једном непознатом се решавају у различитим скуповима. Како су појмови израз и бројевна једнакост потребни за дефинисање једначине и неједначине, у уџбеницима се ови појмови поново појављују и објашњавају. Нажалост, то се ради углавном по принципу: „Понови!“, „Већ сте раније упознали са ...“, „Шта је ...?“, „Решавали смо ...“, „Наведи један пример ...“ итд. Полази се од тога да је ученицима све што су учили у претходним разредима у свежем сећању и потпуно јасно. Уместо да се ученик на одређеном месту у уџбенику подсећа на нешто што је учио у претходним разредима, могло би се кратко и сажето поновити то што очекујемо да зна како би могао да настави да прати ново излагање. Ово навођење појмова и чињеница, могло би се приказати и на крају истог уџбеника. Тиме се пружа шанса да се брзо и више пута понови оно што је потребно. У исту сврху може се користити и материјал спремљен за приказивање помоћу рачунара. За брже понављање могу се користити бројни примери, спремљене апликације и алати. На примеру решавања неких једначина и неједначина даћемо једну могућност таквог приказивања.

Наш основни циљ је да прикажемо визуелизацију решавања једначина и неједначина које се обрађују у основној и средњој школи. При томе, увођењем параметара креирамо проблемске ситуације. Променом параметара можемо створити услове за анализу решивости једначине или неједначине. Тиме подстичемо и ученике да посматрају једначине и неједначине, да експериментишу сами и да изводе закључке о решивости посматраног проблема и броју решења. Добра основа за то је стварање и алгебарског и геометријског погледа на посматрани проблем. У ту сврху погодна је користити одговарајуће рачунарско окружење. Креирање анимација и једноставне илустрације школског садржаја омогућавају наставницима да за кратко време и веома ефикасно упознају ученике са основним математичким појмовима и знањима.

Имајући то у виду, као и друге погодности које ћемо истаћи касније, предлажемо програм GeoGebra.

Мишљења да ће увођење рачунара у наставу само по себи побољшати наставу данас, у светлу богатог искуства у овој области, није

важеће. И пре појаве рачунара постојала су веровања да ће нови медији у настави учинити значајне кораке у побољшању наставе. Ни те се наде нису обистиниле, као што су показала многа истраживања и упоређивања ефикасности медија у настави. Медији сами по себи имају споредну улогу у настави. Примарне су активности које се помоћу њих спроводе. Медији који не могу „прерађивати“ већ само служе за посматрање имају ограничену вредност. Да ли су важнији медији или методе? Ако су методе важније, да ли су рачунари у настави уопште потребни?

Увођењем рачунара у наставу математике добијен је нови когнитивни алат, тј. алат којим наставник може да управља и којег може да контролише. Сви се слажу да је и данас могућа добра настава математике и без нове технологије. Међутим, не би требало изгубити из вида да нова технологија представља нове алате који доносе и нове дидактичке могућности и изазове.

GeoGebra је рачунарски алат који повезивањем симболичког и иконичког представљања доноси бројне могућности. Код овог алата долазе до изражаја принцип активности, принцип оперативности, принцип експерименталности и принцип учења откривањем. Иконичка репрезентација је представљање или предочавање на степену који је прелаз између дословне, реалистичке репрезентације и симболичке, потпуно апстрактне репрезентације. Иконичка репрезентација задржава основне елементе или контуре стварности, док је у симболичкој веза са стварношћу још само конвенционална.

Овај пакет пружа на једноставан и веома приступачан начин припремање и самосталан рад ученика из две веома важне области школске математике, из геометрије и алгебре. Програм GeoGebra је математички софтвер који повезује геометрију и алгебру.

Радне површине креиране у програму GeoGebra могу се преносити у html и word документе. Поред тога конструкције се могу понављати по вољи корак по корак и аутоматски и ручно.

У GeoGebra-и могуће је једначине и координате директно задавати. GeoGebra познаје и експлицитне и имплицитне једначине правих и конусних пресека, параметарско представљање правих као и поларне и Декартове координате тачака и вектора.

Динамичко јединство геометрије и алгебре у GeoGebra-и омогућавају ученицима једноставан експериментални прилаз математици. Они могу као сопствени учитељи самостално да напредују, индивидуално и откривачки да раде и уче. Уз чешћу употребу рачунара и овог програма и бољу обученост, пре свега наставника, организација часа може бити и боља и занимљивија од досадашње. Реакције ученика, повратне информације, такође ће утицати на будуће организације часова.

GeoGebra се може користити као динамички пројектор да би се материја изложила целом одељењу или да би се извео неки експеримент. За то је потребан један лаптоп или РС и пројектор.

GeoGebra је бесплатна и може се скинути са адресе [geogebra.org](http://geogebra.org). Овај програм има команде, инструкције и упутство на више од 40 језика. Превод на српски језик су направили Драгослав и Ђорђе Херцег.

Приказаћемо више примера решавања једначина и неједначина. При томе ћемо мењати и скупове у којима се решења траже. Изложићемо могућност коришћења рачунара и програма GeoGebra. Приказаћемо неке експерименте. Користећи графике и комбинацију боја и текста дискутоваћемо решивост посматраних проблема.

Код решавања једначина издвајамо као посебно интересантну тему решавања система две линеарне једначине са две непознате. Мислимо да би се прелаз од једне једначине са једном непознатом до система две једначине са две непознате могао лако остварити посматрањем једне линеарне једначине са две непознате. Решавајући ову једначину добијамо могућност и да објаснимо имплицитни облик једначине праве. При томе не користимо појам функције. Ово је значајно као припрема за графичко решавање система две линеарне једначине са две непознате. Наиме, као једна од могућности појављују се случајеви код којих је једна од права које су дефинисане имплицитно једначинама посматраног система паралелна са  $y$  – осом. Таква права није график функције и када се крене од експлицитне једначине праве такав случај се мора посебно издвојити. Обично се само констатује да је свака једначина облика  $x = c$ , где је  $c$  неки реалан број једначина праве паралелне са  $y$  – осом. Ако се пође од имплицитно задате једначине праве, сви специјални случајеви се лако изводе из општег. При томе велику помоћ може пружити рачунар и одговарајући софтвер. Идеалан је једноставан софтвер, на нашем језику и да је бесплатан. Пожељне су и друге корисне особине, као што је комбинација алгебарског и геометријског задавање једначина, коефицијената, параметара лако мењања боја нацртаних фигура уз одговарајући текст.

Посматрајући решавање система две линеарне једначине са две непознате и дискусију око решивости и броја решења тог система, приказаћемо могућности које нуди програм GeoGebra као алат за креирање експериментата и дискусију о решивости система.

Готове апликације припремљене за решавање неких једначина и неједначина могу се преузети са <http://hercegd.spaces.live.com>. Потребно је кликнути на “Profile” онда на “SkyDrive”, тамо отворити фолдер Public и у њему пронаћи жељене фајлове.