

Развој појма броја ГЕНЕТСКИ И АКСИОМАТСКИ ПРИСТУП

Александар Липковски
Математички факултет, Београд

1 ШТА СУ БРОЈЕВИ?

Кад обичног човека на улици питате шта је математика, одговориће скоро сигурно: наука о бројевима. Тек понеки ће имати представу да је математика нешто много општије (и магловитије). Овај једноставни одговор, при томе, неће бити сасвим погрешан. Математика је почела са бројевима, и са бројевима се развијала све до 19. века. Зато ћемо поставити себи питање "шта су бројеви" и покушати да на њега дамо одговор.

За математичара који је завршио Математички факултет у Београду или неки други факултет сличног профила, разне врсте бројева представљају најважније примере скупова са одређеним алгебарским (и аналитичким) структурама: група, прстен, поље, уређено поље. При томе се у низу скупова природних, целих, рационалних, реалних, комплексних бројева

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

прва три обрађују у алгебри и математичкој логици, а последња два у математичкој анализи, да би се веза између њих тек накнадно успоставила. Да ли је то тако било историјски и да ли то тако треба и мора да буде?

2 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ. ИНДУКЦИЈА И ДОБРО УРЕЂЕЊЕ

Математика свакако почиње од појма природног броја $1, 2, 3, \dots$, појма насталог апстракцијом процеса бројања. И већ ту, на првом кораку учења у школској (и предшколској) математици, настаје сукоб између историјско-генетског и аксиоматско-скуповног приступа појму броја. Данас је постало уобичајено да појам скупа ПРЕТХОДИ појму броја, а природни бројеви се већ у претшколској настави уводе помоћу појма скупа и појма бијекције, строго математички говорећи као кардинални бројеви коначних скупова. Први већи методички циљ постало је увођење појма СКУПА природних бројева $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Да ли је ово добро и оправдано? Природни бројеви имају свакако двојну структуру: поред особине да изражавају бројност коначног скупа (кардинални број), они исто тако изражавају и редослед (уређење тј. ординални број).

2.1 Природни број као бројност. Бесконачност скупа природних бројева. Кардинали.

У хотел необичног назива „Алеф”, који има онолико соба колико има природних бројева, долази путник-математичар и тражи преноћиште. Рецепционар му саопштава: „Жалим, али све собе су заузете”. Путник каже: „Дајте ми онда собу са бројем 1. „Али шта да радим са гостом из собе број 1?” пита рецепционар. „Пребаците га у собу број 2”, одговори путник. „А са оним из собе број 2?” не одустаје рецепционар. „У собу број 3, и тако са свим гостима”, рече путник. Тако је математичар добио преноћиште у хотелу.

Ова наизглед парадоксална ситуација лепо описује основно својство природних бројева: сваки природан број има непосредног следбеника који је такође природан број. Она исто тако дочарава (привидну али важну!) парадоксалност бесконачних скупова: бесконачан скуп може имати исту бројност као и његов прави подскуп.

2.2 Пеанова аритметика. Принцип математичке индукције. Потпуна индукција.

Аксиоматизацију природних бројева први је извео Ђузепе Пеано¹ 1889. године. По Пеану,

(A1) број 1 је природни број;

(A2) сваки природан број n има свог следбеника n' ;

(A3) број 1 није следбеник ниједног природног броја;

(A4) ако су следбеници два природна броја једнаки, ти бројеви су једнаки;

(A5) (математичка индукција) ако је $F(n)$ својство природних бројева, и ако важи:

(1) $F(1)$ је тачно, (2) ако је $F(n)$ тачно за природан број n тада је то својство тачно и за следбеника n' броја n ; тада је својство $F(n)$ тачно за све природне бројеве.

Како еуфорично рече Кронекер, драги Бог је створио природне бројеве, све остало је дело људи².

Математичком индукцијом се може доказати да су овако описани сви природни бројеви: сваки природан број осим 1 је следбеник неког природног броја. Наиме, уочимо својство $F(n)$ природног броја n : или је $n = 1$, или је n следбеник неког природног броја, и применимо математичку индукцију. Ово у ствари казује да се сви природни бројеви добијају поступком налажења следбеника.

Даљим дедуктивним извођењем из Пеанових аксиома уз дефиницију $n+1 := n'$ добија се аритметичка структура полугрупе у односу на сабирање $(\mathbb{N}, +)$ (а касније и операција множења као поновљеног сабирања). Друга структура, структура уређења, може се затим увести дефиницијом $b > a \iff \exists c : b = a+c$. Ове су две структуре међусобно усаглашене:

¹Giuseppe Peano (1858-1932)

²"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk", Leopold Kronecker

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

Може се уствари рећи да је појам комутативне полугрупе настао управо апстракцијом својстава природних бројева. При томе, комутативна полугрупа природних бројева задовољава још једно, веома важно својство: она има канцелацију (скраћивање). Наиме, ако је $a + c = b + c$ онда је $a = b$. У одређеном смислу, \mathbb{N} је најмања комутативна полугрупа са канцелацијом.

2.3 Природни број као редни број. Уређење. Ординали. Добро уређење.

Из Пеанових аксиома се, међутим, може уз дефиницију $n \leq n'$, ($n' \neq n$) и аксиому транзитивности релације \leq добити уређајна структура (потпуно) уређеног скупа (\mathbb{N}, \leq) , друга основна структура скупа природних бројева БЕЗ коришћења сабирања. Ово је у ствари генетски начин увођења природних бројева.

Некада давно, учење бројева у првом разреду основне школе почињало је бројањем односно набрајањем по реду: један, два, три,... Тек када ученици утврде редослед и називе бројева, кретало се у аритметичке операције. Ако се у настави држимо генетског методичког приступа, обратићемо пажњу на чињеницу како данас мала деца уче бројеве пре школе: исто тако! Постоје и антрополошки докази чињенице да се у развоју људског сазнања редни бројеви налазе испред количинских. Али, канторовска идеја броја као скупа јединица је толико дубоко ушла у педагогију, да се практично сви данас писани почетни уџбеници рачунице базирају на тој идеји. Да ли је то у реду, и која од две структуре, аритметичка или уређајна, је примарна у стварању појма броја? Ако погледамо саме Пеанове аксиоме, видимо да се број 2 не дефинише као кардиналност скупа са два елемента, већ као следбеник броја 1, број 3 је следбеник броја 2 и тако до бесконачности. . .

У опису скупова постоји природна дихотомија: скуп се може описати или набрајањем свих елемената $\{ /QQ[430], b, c, \dots \}$, или преко карактеристичног својства свих елемената $\{ /QQ[430] \mid F(a) \}$. Ова два начина се у ствари, суштински разликују, чак толико да се може говорити о два различита појма скупа. И док се у првом појму бесконачност јавља само као потенцијална бесконачност, у другом појму је то актуелна бесконачност. Појам актуелне бесконачности у наставу можемо увести тек веома касно, у старијим разредима средње школе. У основној школи се користи искључиво први начин описа скупова односно прва врста скупова. Са становишта кардинала, томе одговарају само коначни кардинали. Није на одмет навести шта су два највећа математичка ума човечанства, Гаус и Пуанкаре, мислили о појму актуелне бесконачности:

"Протестујем против употребе бесконачне величине као нечег завршеног, што је у математици увек недопустиво. Бесконачност је само начин изражавања, чије је право значење гранична вредност којој се одређени односи приближавају неодређено близу, док је другима дозвољено да се повећавају без ограничења" (Карл Фридрих Гаус, писмо Шумахеру, 12. јула 1831).

"Не постоји актуална бесконачност, ово су Канторијанци заборавили и били ухваћени у противречностима" (Henry Poincaré: Les mathématiques et la logique III, Rev. métaphys. morale 14 (1906) p. 316).

2.4 Добра уређеност природних бројева

Уређајна структура природних бројева има изузетно важно својство: математички речено она је добро уређена, односно сваки непразан скуп природних бројева има најмањи елемент. Ово својство у једноставнијој формулацији гласи: сваки строго опадајући низ природних бројева је коначан. Значај овог својства се недовољно потенцира у настави математике.

Тврђење. Принцип математичке индукције је еквивалентан принципу добре уређености скупа природних бројева.

Доказ. а) (тотална) математичка индукција \Rightarrow добра уређеност \mathbb{N}

Нека је $S \subset \mathbb{N}$ подскуп који нема најмањи елемент. Тада $1 \notin S$. Уочимо својство $F(n) \Leftrightarrow n \notin S$. Тада је $F(1)$ тачно. Нека $k \in \mathbb{N}$, и претпоставимо (индукцијска хипотеза) да је $F(m)$ тачно за свако $m < k$, тј. $m \notin S$ за свако $m < k$. Али то значи да ни $k \notin S$ јер би у супротном k био најмањи елемент у S . Дакле, тачно је $F(k)$. Применом принципа математичке индукције закључујемо да је $F(n)$ тачно за свако $n \in \mathbb{N}$. Али ово значи да је $S = \emptyset$.

б) добра уређеност $\mathbb{N} \Rightarrow$ математичка индукција

Нека је $F(n)$ својство природног броја $n \in \mathbb{N}$. Нека је тачно $F(1)$ и нека је за свако $k \in \mathbb{N}$ тачна импликација $F(k) \Rightarrow F(k+1)$. Уочимо скуп $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{није тачно } F(n)\} \subset \mathbb{N}$. Очито $1 \notin S$. Ако је $S \neq \emptyset$ тада S има најмањи елемент $k \in S$, $k \geq 2$. Зато $k-1 \notin S$ па је $F(k-1)$ тачно. Али тада је тачно и $F(k)$ тј. $k \notin S$, што је контрадикција. Дакле, $S = \emptyset$ тј. $F(n)$ је тачно за свако n .

Тврђење. Принцип добре уређености скупа природних бројева је еквивалентан принципу коначности строго опадајућих низова.

Доказ. а) добра уређеност \Rightarrow сваки строго опадајући низ природних бројева је коначан

Нека је $n_1 > n_2 > \dots$ строго опадајући низ природних бројева. Уочимо непразан скуп $S = \{n_1, n_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Тада он има најмањи елемент n_k тј. $n_k = n_{k+1} = \dots$ и низ мора бити коначан.

б) коначност строго опадајућих низова \Rightarrow добра уређеност

Нека је, напротив, $S \subset \mathbb{N}$ непразан подскуп који нема најмањи елемент. Тада постоји $n_1 \in S$ и он није најмањи. Зато постоји $n_2 \in S$, $n_2 < n_1$ и он такође није најмањи. Овај процес можемо наставити и добити бесконачан строго опадајући низ природних бројева $n_1 > n_2 > \dots$, што је немогуће. Зато S мора имати најмањи елемент.

2.5 Примена принципа коначности строго опадајућих низова у аритметици.

1. Дељење природних бројева с остатком.

Теорема. За свака два природна броја m и n постоје бројеви q и r из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ такви да је $m = nq + r$ и $r < n$.

Доказ. Ако је $m = m_0 \geq n$, узмимо $m_1 = m_0 - n$, $m_0 > m_1$. Ако је $m_1 \geq n$, ставимо $m_2 = m_1 - n = m_0 - 2n$, $m_0 > m_1 > m_2$. Поступак настављамо све док је $m_k \geq n$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Пошто је сваки строго опадајући низ природних бројева коначан, поступак се мора завршити, па после коначног броја корака долазимо до $m_k = m - kn < n$. Тада је $q = k$, $r = m_k$.

2. Нерастављивост у скупу природних бројева.

Дефиниција. Природан број $n > 1$ је растављив, ако је $n = pq$ за неке природне бројеве $p < n$ и $q < n$, које називамо његовим факторима или чиниоцима. У супротном, број n је нерастављив.

Ова дефиниција се јавља већ у Еуклидовим "Елементима", а нерастављиви природни бројеви се називају и простим бројевима. Ствар је конвенције да ли број 1 сматрамо простим. Обично се сматра да 1 није прост.

Тврђење. Сваки природан број (осим 1) има нерастављиви фактор.

Доказ. Нека је $n > 1$ природан број. Ако је он нерастављив, тврђење је доказано. Ако није, тада је $n = n_1 m_1$ за неко n_1 , $1 < n_1 < n$. Ако је n_1 растављив, настављамо поступак. Пошто је сваки строго опадајући низ природних бројева коначан, поступак се мора завршити, па после коначно много корака долазимо до нерастављивог фактора n_k броја n .

3. Доказ ирационалности броја $\sqrt{2}$ који не користи основну теорему аритметике.

Наиме, нека је $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Тада је $m^2 = 2n^2$. Одузмемо од обе стране ове једнакости производ mn и факторизујмо је. Добијамо $m(m - n) = n(2n - m)$ односно $\frac{m}{n} = \frac{2n - m}{m - n}$. Ставимо $n_1 = m - n$, $m_1 = 2n - m$. Пошто је $m^2 = 2n^2 < 4n^2$ односно $m < 2n$, биће $n_1 < n$. Тако добијамо нови запис броја $\sqrt{2}$ као разломка $\frac{m_1}{n_1}$ са строго мањим имениоцем. На овај начин можемо добити бесконачан низ записа са строго опадајућим имениоцима $n > n_1 > n_2 > \dots$ што је немогуће. Зато је полазни запис $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ немогућ.

4. Основна теорема аритметике. Први део: егзистенција факторизације.

Теорема. Сваки природан број се разлаже у коначан производ нерастављивих фактора.

Доказ. Ако је природан број n нерастављив, тврђење је доказано. Ако није, на основу претходног тврђења n има нерастављиви фактор p_1 , тако да је $n = p_1 n_1$, $n > n_1$. Поступак понављамо за n_1 . Пошто је сваки строго опадајући низ природних бројева коначан, поступак се мора завршити, па после коначно много корака долазимо до нерастављивог фактора n_k броја n и до његове факторизације на нерастављиве $n = p_1 \dots p_k n_k$.

2.6 Основна теорема аритметике. Други део: једнозначност факторизације.

Најважнија теорема у аритметици, такозвана основна теорема аритметике, тврђење о томе да се сваки природан број једнозначно (до на редослед фактора) раставља у производ простих фактора, у школи се обично не доказује. При томе се ово својство веома често користи у основној школи приликом увођења разломака. Мало ко обраћа пажњу на чињеницу да једнозначност факторизације почива на следећем значајном својству простих бројева: ако прости број дели производ два броја, тада он дели бар један од њих. На истом овом својству почива и стандардни школски доказ ирационалности броја $\sqrt{2}$. Покажимо да се доказ својства простих бројева и једнозначности факторизације може једноставно извести помоћу претходно наведених принципа и тврђења, те као такав може бити уврштен у средњошколску наставу математике, као пример доказа, различитих од доказа у геометрији.

Први корак: ако нерастављиви број дели производ два броја, онда он дели бар један од њих. Применимо (комплетну или тоталну) математичку индукцију. Својство очигледно важи за број 1. Нека је n нерастављиви број и нека својство важи за све нерастављиве бројеве $m < n$. Нека сад n дели производ ab и не дели ниједан од њих. Коришћењем дељења с остатком можемо записати $a = pn + r$, $b = qn + s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$. Множењем добијамо да n дели $(pn + r)(qn + s) = n(pqn + rq + sp) + rs$ одакле следи да n дели rs тј. $rs = nm$. На основу ранијег тврђења, број $r > 1$ има прости фактор $n_1 \leq r < n$, $r = n_1 r_1$. Број n_1 дели производ nm и не дели прост број n , па зато на основу индукцијске хипотезе n_1 дели m тј. $m = n_1 m_1$. Сада се у једнакости $n_1 r_1 s = n n_1 m_1$ може скратити n_1 и добијамо једнакост $r_1 s = n m_1$. Даље понављамо поступак и добијамо просте факторе $r \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots$. Овај се низ мора завршити после коначног броја корака k , па долазимо до $r_k = 1$. Сада имамо контрадикцију са чињеницом да n дели $r_k s = s < n$.

Други корак: уопштење претходног на производ више фактора.

Трећи корак: ако имамо две факторизације истог броја у производ нерастављивих, тада сваки нерастављиви чинилац једне факторизације дели производ чинилаца друге факторизације. Стога он дели неки од њих. Али пошто су оба броја нерастављива, они морају бити једнаки. Сада се тај исти чинилац на обе стране скраћује и користи или математичка индукција по броју чинилаца или принцип коначности строго опадајућих низова.

3 Нула, цели и рационални бројеви

3.1 Аксиоматски приступ

Формално аксиоматски гледано, проширење скупа \mathbb{N} нулом је трансформација која природним бројевима додаје неутрални елемент у односу на сабирање, тако

да скуп $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ задовољава асоцијативни, комутативни и закон неутралног елемента. Постоји и друга могућност, да се број 0 од почетка сматра природним бројем и да се Пеанове аксиоме одмах формулишу са 0 уместо 1. Ово је можда аксиоматски оправдано јер поједностављује конструкције, али је свакако суштински неприхватљиво са становишта генетског методичког приступа.

Појам целог броја формално аксиоматски настаје када се овом скупу аксиома (аксиомама комутативне полугрупе са неутралним елементом 0) дода и аксиома супротног елемента. Тако се скуп целих бројева \mathbb{Z} може описати као најмања група у односу на сабирање која садржи скуп природних бројева \mathbb{N} тј. задовољава следеће аксиоме комутативне групе:

- 1) операција $+$ је асоцијативна,
- 2) постоји неутрални елемент 0 таква да је за свако $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$ и $0 + a = a$,
- 3) за свако $a \in \mathbb{Z}$ постоји супротни елемент $b \in \mathbb{Z}$ таква да је $a + b = 0$ и $b + a = 0$, и
- 4) операција $+$ је комутативна.

Можемо рећи да рационални бројеви настају као последица потребе за решавањем једначина облика

$$x + a = b$$

Могућа је и скуповна конструкција прстена \mathbb{Z} целих бројева као количничког скупа скупа парова $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ по релацији еквиваленције $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Као и скуп природних бројева, скуп целих бројева такође поседује две алгебарске операције, сабирање и множење. У односу на те две рачунске операције, \mathbb{Z} је комутативни прстен са јединицом тј. задовољава следеће аксиоме:

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ је комутативна група;
- 2) (\mathbb{Z}, \cdot) је комутативна полугрупа са неутралним елементом 1;
- 3) важи дистрибутивни закон за сабирање у односу на множење тј. множење се расподељује (дистрибуира) на сабирке: $(a + b)c = ac + bc$.

Рационални бројеви, пак, настају из целих бројева уколико желимо да и множење као операција има својство супротног (у овом случају инверзног) елемента. Можемо рећи да рационални бројеви настају као последица потребе за решавањем једначина облика

$$ax = b$$

При томе, дистрибутивни закон као последицу има мултипликативно својство нуле: $0 \cdot a = 0$ за сваки број a . Наиме, $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, одакле потирањем следи тврђење. Стога се код решавања горњих једначина мора искључити случај $a = 0$. Оно што се добија је појам поља, а \mathbb{Q} је најмање поље које садржи прстен целих бројева \mathbb{Z} . Као и код целих бројева, могућа је скуповна конструкција поља \mathbb{Q} рационалних бројева као количничког скупа $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$ скупа парова целих бројева $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (где је $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) по релацији еквиваленције $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

3.2 Генетски приступ

Развој појма броја наравно није текао на малопре описани начин. Први скуп бројева шири од природних који се историјски појављује су позитивни разломци. За то је заслужна једна од најстаријих теорема математике: Талесова теорема. Наравно, разломци се појављују као односи дужи, а аритметику тих бројева развија већ Еуклид у својим Елементима ($\Sigma/QQ[422]/QQ[41e]I/QQ[425]/QQ[415]I/QQ[410]$). Дакле, историјски прво проширење је $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$.

Нула је природним бројевима придружена много касније: увео ју је тек у 7. веку индијски математичар Брахмагупта (598-668). Брахмагупта је рођен и живео у граду Бинмалу у Раџастану, у северозападној Индији. Године 628. написао је трактат у 25 поглавља под називом Брахмаспутасиданта, у коме је садржано много нових математичких појмова, пре свега у вези са бројевима. Његово дело представља карику која недостаје између старогрчке математике, пре свега Еуклида, и арапске математике која је превођењем на латински језик прешла у Европу. У ствари, то најважније Брахмагуптино дело преведено је највероватније око године 1050. на арапски под називом Синдхинд. У том делу се по први пут појављује појам нуле као самосталног броја, а не само као "држача места" у позиционом запису броја. Описане су и особине нуле као броја, које одговарају наведеној аксиоми неутралног елемента и мултипликативном својству нуле.

Шта је оно најважније о бројевима чему у школи треба научити децу? Аксиоматски приступ инсистира на особинама операција. Али, доследно спроводећи овакав методички приступ, доћи ћемо у ситуацију француског министра просвете који је приликом посете једној основној школи, добронамерно упитао ђака "Колико је $2 + 3$?" и добио као из топа одговор " $2 + 3$ је једнако $3 + 2$ због комутативности!". Ову згуду је испричао познати руски математичар Владимир Игоревич Арнољд, један од највећих критичара стања у данашњем западном систему образовања. Да не би дошли у ту ситуацију, неопходно је да схватимо: најважније што српску децу треба да научимо јесте РАЧУНАЊЕ са бројевима! Асоцијативност и комутативност су на овом степену развоја појмова од другостепеног значаја, то су правила која помажу у рачунању и која се од стране ученика усвајају имплицитно. Постоји још већа опасност да не само да ученици не умеју да рачунају, већ да и наставници то не знају. Како је испричао амерички нобеловац Глен Сиборг, 99% ђака у САД, али и 95% њихових учитеља не уме да подели 111 са 3 без помоћи калкулатора!

4 Реални бројеви

Постоје бар два начина да се формално аксиоматски уведе поље реалних бројева. Један је везан за аксиому супремума, а други за Архимедову аксиому. У оба случаја се полази од алгебарских појмова поља и уређења. Дакле, \mathbb{R} је тотално уређено поље које садржи поље разломака \mathbb{Q} и које задовољава нека додатна својства.

4.1 Aksioma супремума

Аксиома супремума тражи да сваки непразан подскуп у \mathbb{R} који има горњу границу мора имати и најмању горњу границу, тј. супремум. Ово својство не поседују рационални бројеви: број 1,5 је горња граница за скуп свих коначних децималних развоја броја $\sqrt{2}$ (који су рационални бројеви 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, . . .), али скуп свих горњих граница нема најмањи елемент у \mathbb{Q} . Конструкција поља реалних бројева која полази од оваквог система аксиома је конструкција помоћу такозваних Дедекиндових пресека. Дедекиндови пресеци на одређени начин представљају "рупе" у скупу рационалних бројева. У одређеном смислу, реални бројеви су јединствено тотално уређено поље, комплетно у смислу Дедекиндова (тј. у коме важи аксиома супремума).

4.2 Архимедова аксиома

Комплетност по Дедекинду тј. аксиома супремума не узима у обзир структуру поља у \mathbb{R} . Комплетност по Дедекинду је специјалан случај општег појма комплетности метричких простора. Метрички простор је комплетан, ако сваки Кошијев низ у њему конвергира тј. има граничну вредност. Другим речима, ако имате низ такав да растојање између његових чланова неограничено опада (Кошијев низ), тада постоји елемент тог простора такав да растојање између њега и чланова тог низа неограничено опада (конвергентан низ). Комплетност по Дедекинду повлачи комплетност у овом смислу, али не и обратно. Стога, није довољно рећи да је \mathbb{R} комплетно тотално уређено поље. Међутим, постоји једно алгебарско својство које имају и рационални бројеви, које је било познато још Старим Грцима и које је довољно да обезбеди јединственост поља реалних бројева. Ради се о чувеној Архимедовој аксиоми која омогућује увођења појма самерљивих (и несамерљивих) дужи. Овај појам био је познат у старогрчкој математици, што даје посредан доказ да су Стари Грци имали представу о реалним бројевима, иако се данас сматра супротно. Архимедова аксиома у старогрчкој верзији каже: за сваке две дужи a и b такве да је $a < b$, увек постоји природан број n такав да је $(n - 1)a \leq b$ и $na > b$. Исказана у савременим терминима, аксиома гласи: за сваки број a (тј. елемент поља) постоји природан број $n > a$. Поље рационалних бројева \mathbb{Q} је Архимедово: у њему важи Архимедова аксиома. Може се показати да је \mathbb{R} јединствено комплетно (у смислу конвергентности Кошијевих низова) Архимедово тотално уређено поље.

Овакав аксиоматски приступ омогућује да се поље реалних бројева \mathbb{R} конструише као тополошко комплетирање поља рационалних бројева \mathbb{Q} . Наиме, \mathbb{R} је скуп свих Кошијевих низова у \mathbb{Q} , посечен по релацији еквиваленције у којој су два Кошијева низа ако и само ако имају исту граничну вредност.

4.3 Генетски приступ

Из претходне приче видимо да од две конструкције поља реалних бројева генетски је прихватљивија она која говори о Кошијевим низовима, тј. која реалне бројеве уводи као бесконачне децималне записе.

Ко се од вас сећа алгоритма за налажење квадратног корена? Појавом стоних калкулатора, овај је алгоритам потпуно пао у заборав. Ево како изгледа тај алгоритам у случају израчунавања првих неколико децимала $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{2} = 1, 4142 \dots \\
 \begin{array}{r}
 1 \\
 1 \ 0 \ 0 \\
 - \ 9 \ 6 \\
 \quad 4 \ 0 \ 0 \\
 \quad - \ 2 \ 8 \ 1 \\
 \quad \quad 1 \ 1 \ 9 \ 0 \ 0 \\
 \quad - \ 1 \ 1 \ 2 \ 9 \ 6 \\
 \quad \quad \quad 6 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \\
 \quad \quad \quad - \ 5 \ 6 \ 5 \ 6 \ 4 \\
 \quad \quad \quad \quad 3 \ 8 \ 3 \ 6
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21 \cdot 1 = 21 \\
 22 \cdot 2 = 44 \\
 23 \cdot 3 = 39 \\
 24 \cdot 4 = 96 \\
 25 \cdot 5 > 100 \\
 \\
 281 \cdot 1 = 281 \\
 282 \cdot 2 > 400 \\
 \\
 2821 \cdot 1 = 2821 \\
 2822 \cdot 2 = \\
 2823 \cdot 3 = \\
 2824 \cdot 4 = 11296 \\
 2825 \cdot 5 > 11900 \\
 \\
 28281 \cdot 1 = 28281 \\
 28282 \cdot 2 = 56564 \\
 28283 \cdot 3 > 60400 \\
 \dots
 \end{array}$$

Нестанак овог алгоритма из наставе је дидактички потпуно неоправдан! Јер, алгоритам за израчунавање корена није важан због тога да стварно израчунамо корен са одређеним бројем децимала - за то су нам данас заиста zgodнији рачунари - већ због две дидактички веома значајне чињенице. Прво, то је један од првих АЛГОРИТАМА са којима се деца срећу, чиме се овај веома значајан мисаони појам полако усађује у свест детета. Друго, и значајније од првог, јесте чињеница да је то једно (и за сада једино!) опипљиво средство да се ученику приближи појам реалног броја као броја који има бесконачно много децимала које можемо увек израчунати са колико год хоћемо великом (али задатом!) тачношћу.

Архимедова аксиома као полазна основа за формирање појма реалног броја је утолико значајнија, што она пружа истовремено и основу појмова мерења (у математици и физици), самерљивих и несамерљивих дужи, и тако даје чврсту основу за здраво формирање појма реалног броја, који је с једне стране везан за геометрију преко бројне осе и мерења дужи, а с друге стране за бесконачни децимални запис. Прича о мерењу нам показује да је, историјски гледано, проширење појма броја текло прво овако:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}^+,$$

па су тек касније укључени нула и негативни бројеви. Наравно, развој човечанства је довео до тога да школовање деце не мора у свим детаљима и у потпуности да прати генетски развој: на неким местима се може ићи унапред, а то је управо увођење нуле и негативних бројева већ на нивоу природних бројева а поготову разломака. Али таква места морају бити веома пажљиво одабрана.

5 Комплексни бројеви

Најзад, настанак комплексних бројева се формално аксиоматски везује за решавање квадратне једначине $x^2 + 1 = 0$ која нема решења у пољу реалних бројева. Дакле, \mathbb{C} је најмање поље које садржи поље реалних бројева \mathbb{R} и решење поменуте квадратне једначине. Имамо бар два начина конструкције овог поља. Први, сложенији алгебарски начин, је да је \mathbb{C} количник $\mathbb{R}[x] / (x^2 + 1)$ прстена реалних полинома $\mathbb{R}[x]$ по главном идеалу $(x^2 + 1)$ генерисаном полиномом $x^2 + 1$. Други, једноставнији скуповни начин, је да је $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ при чему се операције сабирања и множења у том скупу дефинишу једнакостима $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.

При конструкцији поља комплексних бројева дешава се нешто што је веома ретко у математици. Наиме, ми смо тражили од овог скупа да само једна једина квадратна једначина има у њему решење, наиме једначина $x^2 + 1 = 0$. А шта смо добили? Не само да та, па и све квадратне једначине у \mathbb{C} имају решење, већ и много више од тога: СВАКА алгебарска једначина са коефицијентима у \mathbb{C} имају у \mathbb{C} решење. То је тзв. основна теорема алгебре, коју је први строго доказао Гаус и која се на модерном алгебарском језику исказује овако: поље \mathbb{C} је алгебарски затворено. Зато је \mathbb{C} најмање алгебарски затворено поље које садржи поље реалних бројева \mathbb{R} .

Комплексни бројеви су у математику ушли веома касно. Још у 19. веку било је великих математичара који су одрицали постојање комплексних бројева. Тек је радovima Хамилтона и Кејлија, енглеских математичара 19. века који су до краја разрадили појам броја (тј. алгебре над пољем реалних бројева) и показали да постоје и друге класе "бројева", Хамилтонови кватерниони и Кејлијеве октаве, али се приликом њиховог увођења морамо одрећи неких од фундаменталних особина бројева (комутативности множења код кватерниона и асоцијативности код октава), дефинитивно учврстио појам комплексног броја. С друге стране, неоспорно је да су већ Тартаља и Кардано приликом решавања кубне једначине морали, макар и формално, радити са комплексним бројевима. Наиме, најважнији случај кубне једначине, тзв. *casus irreducibilis*, случај када једначина има три различита реална корена, може се Кардановом формулом решити само уколико се обављају рачунске радње са комплексним бројевима. Пошто су и Тартаља и Кардано умели да решавају тај несводљиви случај, имплицитни је закључак да су умели да ралунају са комплексним бројевима.

Најбољи генетски приступ увођењу комплексних бројева је аналитичко-геометријски, преко вектора у равни односно Арганове равни \mathbb{R}^2 . Комплексни број $a + bi$ се интерпретира као тачка равни (или вектор са почетком у $(0, 0)$ и крајем у тој тачки) са координатама (a, b) . То нам омогућује да имагинарну јединицу, дакле један "непостојећи" објект, прикажемо као реално постојећи. Исто тако, то омогућује да повежемо комплексне бројеве са геометријом равни (преко изометријских трансформација равни) и са тригонометријом (преко тригонометријског облика комплексног броја, адиционих формула и Муавровог обрасца).