

DMS, Beograd 18. 1. 2009.

Metode razvijanja matematičkih sposobnosti učenika
(8 akreditovanih časova)

autori:

Dr Gradimir Vojvodić
Dr Zagorka Lozanov-Crvenković
Dr Siniša Crvenković
Dr Nevena Pušić

redovi profesori PMF u Novom Sadu

Dr Siniša Crvenković

RAZVIJANJE MATEMATIČKIH SPOSOBNOSTI KROZ REŠAVANJE ZADATAKA

Na jednoj od konferencija UNESCO-a o obrazovanju usvojen je sledeći stav:

Matematika i njen stil mišljenja moraju postati sastavni deo opšte kulture savremenog čoveka, čoveka koji se obrazuje u današnjim školama, bez obzira da li će on vršiti posao koji koristi matematiku ili ne.

U knjizi STUDIES IN MATHEMATICS EDUCATION, Moving into the twenty-first century, Vol. 8, UNESCO, 1992., govori se o ciljevima matematičkog obrazovanja učenika u dvadeset prvom veku. Između ostalog, kao prioriteti, navedeni su sledeći ciljevi matematičkog obrazovanja učenika:

- razvijanje pravog razumevanja matematičkih izraza, koncepata, procesa i dokaza;
- pripremanje učenika koji žele da studiraju matematiku ili predmete koji koriste matematiku;
- razvijanje sposobnosti logičkog mišljenja, rezonovanja, analiziranja i preciznog izražavanja;
- razvijanje sposobnosti primene matematike u "profesionalnom" životu, na primer očuvanje okoline, smanjenje zagađenja, razvijanje pravih nutricionističkih programa;
- razvijanje geometrijskog načina razmišljanja, uključujući dokaze geometrijskih tvrđenja, i veštine crtanja;
- prelaženje sa aritmetike na algebru; rešavanje problema korišćenjem algebarske metode;
- razvijanje "ljubavi" za predmet tako da se učenik uključi u samoobrazovanje i učešće na matematičkim takmičenjima;
- razvijanje sposobnosti učenika da odgovore zahtevima moderne tehnologije i inovacija, na primer računara;
- da cene lepotu i moć matematike i da su svesni njenih ograničenja;
- da cene doprinos matematičara koji su u prošlosti dali značajne rezultate u nauci.

MATEMATIČKE SPOSOBNOSTI

MATEMATIČKE SPOSOBNOSTI se definišu kao stabilna psihološka stanja i karakteristike osobe u toku obavljanja matematičkih aktivnosti na miran, gladak način.

Osnovne matematičke sposobnosti koje matematički talenti treba da poseduju su sledeće:

- sposobnost posmatranja,
- sposobnost asocijacije,
- sposobnost računanja,
- sposobnost apstraktnog sumiranja,
- sposobnost logičkog rezonovanja,
- sposobnost zapisivanja i izražavanja.

Ovo su osnove formiranja sposobnosti analiziranja i rešavanja problema.

SPOSOBNOST POSMATRANJA

Svo ljudsko znanje dobijeno je posmatranjem. Matematika takođe traži posmatranje. Gauss je čak rekao da je matematika posmatračka disciplina. Posmatračka sposobnost u matematici demonstrira se u prepoznavanju “broja” i “figure” u stvarima i to brzo. Drugim rečima, to je sposobnost nalaženja unutrašnjih veza u problemu iz njegove forme i strukture.

(a) nalaženje strukturnih karakteristika i međuveza matematičkih relacija;

(b) prepoznavanje nekih specijalnih figura i relacija iz date geometrijske figure.

Primer za (b).

Šestougao je podeljen na crne i bele trouglove kao na slici. Svaka dva susedna trougla (koji imaju zajedničku stranicu) su različite boje. Da li se desetougao može podeliti na sličan način?



Rešenje:

Svaka stranica belog trougla je stranica crnog trougla (i to samo jednog). Svaka stranica crnog trougla je stranica belog trougla (i to samo jednog), osim stranica šestougla.

Neka je broj belih trouglova m , a broj crnih trouglova n . Tada je $3m$ broj stranica belih trouglova, a $3n$ broj stranica crnih trouglova. Važi sledeća relacija:

$$3n - 3m = 6.$$

Ako bi se na sličan način mogao podeliti desetougao, onda bi imali:

$$3n' - 3m' = 10,$$

gde je m' – broj belih trouglova, a n' – broj crnih trouglova. Leva strana jednakosti je deljiva sa 3, dok desna nije. Kontradikcija.

SPOSOBNOST ASOCIJACIJE

Asocijacija je psihološki proces u kome se neko, kada opazi ili se seti jedne stvari, seti se neke druge relevantne stvari. Asocijacija je most za transformisanje problema. Veze u zadacima su složene, nikad očigledne, niti direktne. Od učenika se traži da su savladali veštine korišćenja asocijacija zasnovanih na relevantnom znanju.

Primer . Rešiti sistem jednačina:

$$y = 4x^3 - 3x$$

$$z = 4y^3 - 3y$$

$$x = 4z^3 - 3z .$$

Uvodimo smenu: $x = \cos \alpha$. Sistem postaje:

$$y = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$$

$$z = 4 \cos^3 3\alpha - 3 \cos 3\alpha = \cos 9\alpha$$

$$x = 4 \cos^3 9\alpha - 3 \cos 9\alpha = \cos 27\alpha .$$

Sledi: $\cos \alpha = \cos 27\alpha .$

SPOSOBNOST RAČUNANJA

Danas, različiti ciljevi u matematičkom obrazovanju uključuju temu sposobnosti računanja. Uzmimo za primer *IEA – Investigation of International Mathematical Education* čiji ciljevi u kognitivnim aspektima uključuju:

- Računanje: sposobnost da se direktno operiše sa elementima problema baziranim na naučenim principima, kao i sposobnost da se primeni posebno znanje koje se odnosi na neku činjenicu ili izraz.
- Shvatanje: savladavanje koncepata, principa, pravila i opštih mera, i sposobnost prevođenja problema na razne načine.
- Primena: sposobnost da se uključi relevantno znanje, da se izabere pravi algoritam i da se ispuni izračunavanje; sposobnost da se reši problem na konvencionalan način.
- Analiza: sposobnost primene nekonvencionalnih metoda za nalaženje drugih načina i formiranja dokaza i kritike, što je napredniji proces razmišljanja.

Zadaci moraju biti testovi TAČNOSTI, FLEKSIBILNOSTI i BRZINE sposobnosti učenika u računanju. Ovo se demonstrira kroz:

- sposobnost shvatanja apstraktnog formalizma notacionog jezika;
- sposobnost zapamćivanja definicije, formula i pravila operacija;
- sposobnost transformacije;
- sposobnost uproščavanja operacionog procesa, naime, primenjivanje operacija na koncizan i skokovit način;
- sposobnost obrtanja procesa računanja, kao i sposobnost proveravanja;
- fleksibilnost u primeni operacija, primeni formula, pravila i koncepata i, takođe, sposobnost da se okrene drugoj operaciji čim se jedna završi.
- sposobnost predviđanja i procene.

Nekad je neophodno transformisati nejednakost dok se predviđa i procenjuje, što zahteva mnogo veće sposobnosti nego samo transformisanje jednačina.

Prvih 6 komponenti su osnovni elementi za izgradnju sposobnosti računanja i veoma su važni kriterijumi da se oceni učenička sposobnost računanja. Međutim, malo veći zahtevi očekuju da učenici imaju i (g).

Primer za (c)

U dekadnom zapisu broja $n = 5 \cdot 7^{34}$, neke cifre se pojavljuju bar četiri puta.

Rešenje:

Ako neki broj ima više od 30 cifara, onda se bar jedna od deset cifara mora pojaviti bar 4 puta. Iz

$$\log_{10} n = \log_{10} 5 \cdot 7^{34} = \log_{10} 5 + 34 \cdot \log_{10} 7 = 29,4323... < 30$$

zaključujemo da n ima 30 cifara.

Ako se nijedna cifra u dekadnom zapisu broja n ne pojavljuje više od tri puta, onda se svaka cifra mora pojaviti tačno tri puta. Sledi:

$$3 \mid n. \quad \text{Kontradikcija.}$$

SPOSOBNOST APSTRAKTOG SUMIRANJA

Ova sposobnost se odnosi na apstraktno sumiranje veza među matematičkim objektima, brojevima i prostornim figurama, kao i na izračunavanje zasnovano na ovim vezama. Ova sposobnost se često testira na IMO na sledeća tri načina:

- (a) Formulisanje matematičkog problema iz praktičnog problema. Ovo se često naziva matematizacija ili formalizacija praktičnih problema. Ovakvih primera ima mnogo.
- (b) Sumiranje opšteg pravila da bi se formulisala hipoteza, a onda dokazalo formalno.
- (c) Sumiranje ili generalizacija određenog problema, uopštenje apstraktnog zaključka kroz analizu i sintezu konkretnog problema, i konačno, primena zaključka na specifični problem koji se rešava.

SPOSOBNOST LOGIČKOG REZONOVANJA

Sposobnost logičkog rezonovanja je srž matematičkih sposobnosti. Obično se manifestuje kao:

- (a) Razumevanje formalnih izraza, kao i veština nalaženja veza među formulama, principima, teoremama i aksiomama u konceptualnom sistemu.
- (b) Ovladavanje relevantnim logičkim znanjem (kao 4 forme propozicija, dovoljni uslovi i potrebni uslovi, induktivno i deduktivno rezonovanje, rezonovanje po analogiji, transformisanje ekvivalencija i neekvivalencija izraza), i takođe sposobnost korektnog rezonovanja.
- (c) Savladavanje poznatih matematičkih metoda (kao što su analitička metoda, sintetička metoda, svodenje na apsurd, matematička indukcija).
- (d) Jasno razmišljanje sa pravilnom prezentacijom; sposobnost mišljenja po konciznim šemama tako što se izostavljaju i pojednostavljaju nepotrebne stvari u razmišljanju. Problemi iz geometrije zahtevaju sposobnost strogog deduktivnog rezonovanja, konciznog i fleksibilnog. Problemi kombinatorike, grafova i logike ne zahtevaju veliko znanje u specijalizovanim oblastima već vrlo solidan "background" u logičkom rezonovanju.

KREATIVNE (SPECIJALNE) MATEMATIČKE SPOSOBNOSTI

U kreativne sposobnosti ubrajaju se sledeće:

- sposobnost matematičke imaginacije,
- sposobnost matematičke intuicije,
- sposobnost matematičkog predviđanja,
- sposobnost matematičke transformacije,
- sposobnost matematičke konstrukcije.

SPOSOBNOST MATEMATIČKE IMAGINACIJE

Imaginacija je mentalni proces u kome ljudski mozak procesira postojeću pojavu i onda stvara novu. Ona je figurativna, uopštena, celovita, slobodna i fleksibilna. Kao rezultat, ona je sposobna da stvara. Matematička imaginacija je, prema tome, proces u kome neko dobija (pribavlja) i upošljava figurativne misli u matematičkoj saznoj aktivnosti. Ona zahteva neophodno prethodno znanje i sposobnost figurativnog načina razmišljanja.

Matematička imaginacija se obično manifestuje na sledeći način:

- (a) Sofisticiranost u pridruživanju geometrijskih slika matematičkim problemima.
- (b) Sposobnost dodavanja pomoćnih linija u geometrijskim problemima.

Ilustrovaćemo ove dve sposobnosti primerima.

Primer za (a).

Neka su x, y, z realni brojevi, takvi da je $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$.

Dokazati da važi:

$$\frac{\pi}{2} + 2 \sin x \cos y + 2 \sin y \cos z > \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$$

Rešenje: Nejednakost je ekvivalentna sa:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} + 2 \sin x \cos y + 2 \sin y \cos z > \\ & 2 \sin x \cos x + 2 \sin y \cos y + 2 \sin z \cos z \\ \Leftrightarrow & \frac{\pi}{4} + \sin x \cos y + \sin y \cos z > \sin x \cos x + \sin y \cos y + \sin z \cos z \\ \Leftrightarrow & \frac{\pi}{4} > \sin x(\cos x - \cos y) + \sin y(\cos y - \cos z) + \sin z \cos z. \end{aligned}$$

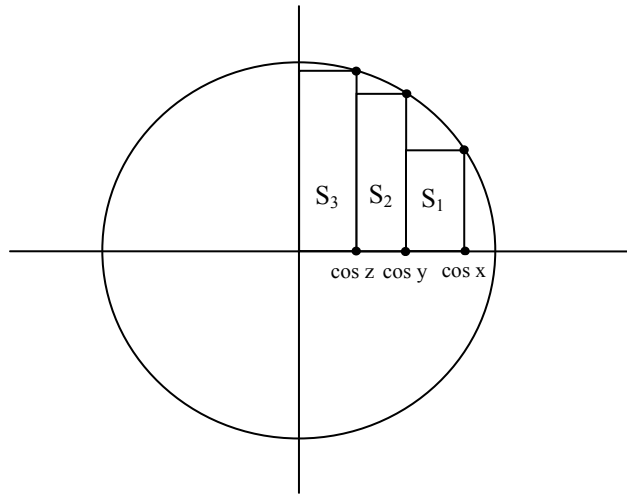
Iz $x < y < z < \frac{\pi}{2}$ sledi $\cos x > \cos y > \cos z$.

Označimo:

$$S_1 = (\cos x - \cos y) \sin x, \quad S_2 = (\cos y - \cos z) \sin y, \quad S_3 = \sin z \cos z. \text{ Tada važi:}$$

$$\frac{\pi}{4} > S_1 + S_2 + S_3$$

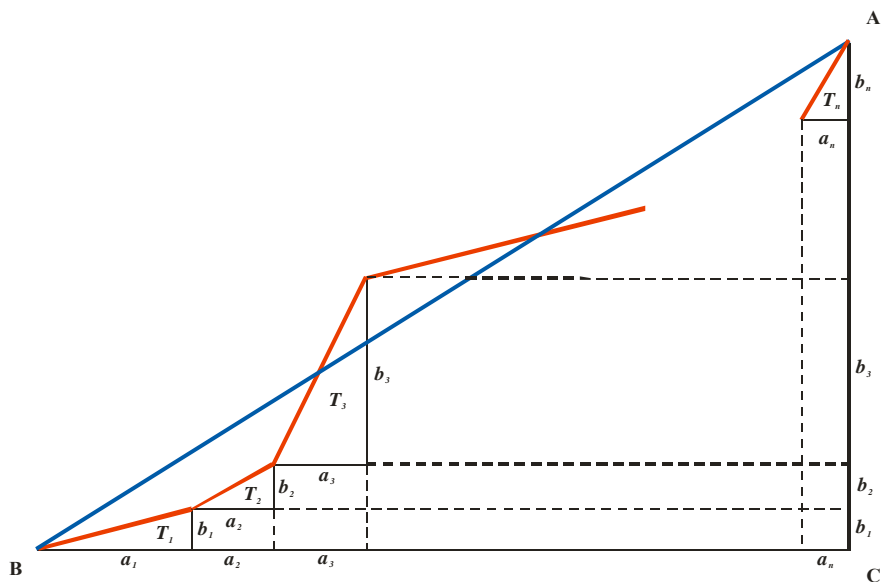
Vidi sledeću sliku



Primer za (b). Za bilo koje pozitivne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ važi:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}.$$

Rešenje:



Jednakost važi kada su trouglovi T_1, T_2, \dots, T_n slični.

SPOSOBNOST MATEMATIČKE INTUICIJE

Intuicija je direktno razumevanje i unutrašnji pogled u suštinu stvari. Matematička intuicija je direktno shvatanje i unutrašnji pogled u suštinu matematičkih objekata. Intuicija se demonstrira kroz:

- (a) direktno razumevanje suštine matematičkih objekata celovito;
- (b) dobijanje jasne slike matematičkog problema, njegove strukture i unutrašnjih relacija;
- (c) direktno zahvatanje procedure rešenja i rezultata problema.

SPOSOBNOST MATEMATIČKOG PREDVIĐANJA

Predviđanje (hipoteza) se odnosi na verodostojno rezonovanje o nepoznatim stvarima i njihovim zakonima i pravilnostima baziranim na poznatim činjenicama i znanju. Matematička hipoteza je verodostojno rezonovanje o nepoznatim vrednostima i njihova veza prema poznatim matematičkim uslovima i teorijama. Prema tome, hipoteza je delimično naučna sa velikim stepenom pretpostavki. Ona se može postaviti ne samo kroz eksperiment, indukciju, analogiju i specijalizaciju, već i kroz imaginaciju, intuiciju i obratno razmišljanje. Sposobnost matematičkog predviđanja demonstrira se kroz:

- (a) pogađanje pristupa dokazima;
- (b) pogađanje zaključaka tvrdjenja, što je posebno značajno u rešavanju "istraživačkih" problema.

SPOSOBNOST MATEMATIČKE TRANSFORMACIJE

Sposobnost matematičke transformacije je sposobnost transformacije od jedne vrste psiholoških operacija na drugu, što je slično fleksibilnosti i kreativnosti mišljenja do izvesnog stepena.

- (a) Treba biti u stanju da se razbiju ograde uobičajene prakse i da se nađu novi pristupi i metode, ako problem ne može da se reši na konvencionalan pristup i način.
- (b) Treba biti u stanju prebaciti se sa konvencionalnog mišljenja na obratno razmišljanje.

Primer za (a).

Ako je zbir nenegativnih realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ 90, onda postoje četiri od ovih devet brojeva čija suma je najmanje 40.

Rešenje:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2
a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2	a_3

Zbir brojeva u svakoj vrsti je 90. Suma cele tablice je 360. Postoji kolona u kojoj je zbir brojeva najmanje $\frac{360}{9} = 40$

SPOSOBNOST MATEMATIČKE KONSTRUKCIJE

Poslednjih godina sve više se na olimpijadama javljaju problemi koji traže konstruktivne dokaze. Ovaj tip problema traži da učenik precizno razvija matematičke objekte prema zahtevima problema. Učenici treba da pažljivo posmatraju, dobro rade eksperimente, budu dobri u asocijacijama, zamišljaju i čvrsto pogađaju, transformišu fleksibilno i zaključuju strogo dok rešavaju ove probleme. Ovi problemi su dobri testovi učeničkih sposobnosti shvatanja i kreativnosti. Kod rešavanja konkretnih zadataka ova sposobnost se pokazuje na sledeći način:

- (a) iz strukturnih karakteristika problema treba formirati matematički model, kao što je funkcija, jednačina, graf, algoritam da bi se povezali uslovi u zaključak;
- (b) kroz direktno konstruisanje matematičkog objekta;
- (c) kroz konstruisanje kontraprimera koji zadovoljava uslove u nameri da negiramo zaključak

dr Gradimir Vojvodić

O TRIGONOMETRIJI

Reč trigonometrija je sastavljena od grčkih reči *τριγωνου* (trougao) i *μετρετυ* (mera). To pokazuje da se ova oblast matematike u početku bavila problemom merenja trougla. Odnosi između uglova i stranica trougla izraženi su pomoću trigonometrijskih funkcija (*sinus, kosinus, tangens i kotangens*).

Trigonometrijske funkcije su baza za opisivanje mnogih pojava i procesa u savremenoj nauci i tehnici.

Analitički zasnovana trigonometrija tokom devetnaestog veka ima široku primenu u mehanici, fizici i tehnici, naročito u proučavanju oscilatornog kretanja (npr. talasna kretanja u akustici, optici i elektromagnetici)

Dokazano je da se svako periodično kretanje može sa dovoljnom tačnošću predstaviti u vidu zbira prostih harmonijskih oscilacija, tj. oscilacija koje se matematički izražavaju formulom $y = a \sin(bx + c)$,

Značajnu ulogu u trigonometriji ima broj π , koji je u matematici poznat više od četiri hiljade godina. (Inače π je iracionalan broj i nije rešenje nijedne algebarske jednačine, pa je i transcendentan broj)

Vavilon i Egipat u kojima su hiljadama godina pre naše ere bile proučavane astronomija i astrologija u trgovačke ili religiozne svrhe, bili su osnov za prva trigonometrijska znanja. Takodje, neki podaci ukazuju na to da su i u drevnoj Indiji i Kini ta znanja takođe bila korišćena.

Vavilonci su uveli šesdesetični brojni sistem ,pa je današnja podela punog kruga na 360 stepeni, stepena na 60 minuta i minuta na 60 sekundi ostatak vavilonskog uticaja.

U Egiptu, poplave zemljišta u slivu reke Nila, nametale su, prema Herodotu, potrebu dobro razvijenog geometarskog merenja i geometrije. Koliko se već tada držalo do geometrijskih znanja pokazuju ne samo problemi iz "Ahmesove računice" (oko 1700. g. pre n.e.), nego i činjenica da je bilo uvedeno naročito činovničko zvanje državnih geometara, premerača zemljišta, ili kako su ih Grci nazivali "zatezači užeta". Tada se naime, prav ugao konstruisao zatezanjem užeta u obliku trougla sa stranama 3, 4, 5. Pominje se da su Egipćani za određivanje nagiba pri građenju piramida ili pri određivanju daljine broda na pučini, koristili veličinu zvanu *seqt*, koja je verovatno bila kosinus.

U Antičkoj Grčkoj sistematičuju se prikupljena znanja i otkrivaju nove činjenice i metode.

Tales iz Mileta (624-548 g. pre n.e.) živeo je i u Egiptu. Poznato je da je izmerio visinu piramide po senci. On je to postigao mereći senku piramida onda kada je "naša senka jednaka nama samima". Znao je da koristi sličnost trouglova i mogao je da odredi udaljenje broda od pristaništa Mileta.

Aristarh sa Samosa (270 g. pre n.e.) napisao je delo "*O razmerama rastojanja Zemlje, Sunca i Meseca*" u kojem je pokušao da odredi rastojanja i razmere posmatrajući uglove između pravca ka Suncu i ka Mesecu onda kad je osvetljena tačno polovina meseca koristeći činjenicu da onda Zemlja, Sunce i Mesec čine pravougli trougao.

Heron Aleksandrijski (I vek pre n.e.) u svom delu "O merenju polja", daje i formule:

$$\frac{ab}{h_c} = \frac{ac}{h_b} = \frac{bc}{h_a} = 2R$$

Hiparh iz Nikeje (160-125 g. pre n.e.) napisao je delo "*O tetivama kružnih lukova*" u 12 knjiga (nisu sačuvane), a u kojem je po prvi put navedena tablica tetiva sa uputstvima za primenu za rešavanje trougla i date osnove sferne trigonometrije

Klaudije Ptolomej, koji je živeo u Aleksandriji u drugom veku pre n.e., napisao je astronomski zbornik poznat pod arabljskim nazivom "Almagest", u 13 knjiga u koji su ušli Hiparhovi rezultati, u kojem je Ptolomej dao svoj metod sračunavanja tetiva.

Grčki uticaj je ojačao nakon Aleksandra Makedonskog, u Indiji što se ogledalo u radovima matematičara Aryabhata (476 g. n.e.) i Brahmagupta (598 g. n.e.), a posle njih Bhaskara (1114 g. n.e.). Indijski astronomi i matematičari prvi su primetili da umesto odnosa tetive i poluprečnika, koji su koristili grčki matematičari je podjednako koristiti odnos polutetive i poluprečnika. Time je prvi put upotrebljen odnos kojim se ustanovljuje funkcija $\sin x$. a Evropljani prevodeći ga na latinski, nazvali *sinus*, što znači ulegnuće, udubljenje, nabor ili šupljina

Muhamed ibn Musa Alhvarizmi, čija je knjiga «*Aldžabr al-mukabale*» dala ime današnjoj algebri, sa Al-Batanom (oko 900 g. n.e.) dao je ponovo prerađene tablice Ptolomeja, ističući prednost upotrebe sinusa. Spomenimo i Al-Biruni (oko 1000 g. n.e.), a naročito Abul-Wafa (940 g. n.e.). Veoma su značajne tablice tangensa Abul Wafe.

U srednjem veku dolazi do zastoja u razvoju svih nauka . Dug period vremena pokriven je mrakom inkvizicije. Trigonometrija ne doživljava bolju sudbinu nego druge svetovne discipline koje crkva progona ako joj na služe. Posle dužeg vremena, vredno pomena je tek delo Johana Milera. On, oko 1464. piše delo "*De triangulis omnimodis*", koje sadrži rešenja nekih važnih problema ravne i sferne trigonometrije. Ovo delo bilo je objavljeno tek posle njegove smrti 1533. godine i bilo je od velikog značaja za dalji razvitak trigonometrije. Regiomontanusu se duguje i tablica tangensa. U novom veku, posle otkrivanja Amerike, nagli razvitak trgovine i industrije dao je pun podstrek novom razmahu nauke kojom više ni crkva nije mogla stati na put. Među matematičarima, čija su dela značajna za dalji razvoj trigonometrije, treba pomenuti Njutna (1642-1727), koji je prvi u delu "*De analysi per equationes numero terminorum infinitas*" izložio radove za sinus i kosinus,

Vijeta (1540-1603), je prvi upotrebljavao svih šest trigonometrijskih funkcija, Ojler (1707-1783) je uveo današnje oznake trigonometrijskih funkcija, uspostavio vezu između trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija uz upotrebu kompleksnih brojeva i dao izraze za sve trigonometrijske funkcije u obliku redova.

Leonald Ojler je koristio analitički pristup za trigonometrijske funkcije , ne vezujući ih nužno za trigonometrijsku kružnicu. Njihov argument shvata uopšteno kao realan broj, a ne isključivo kao ugao ili luk

Zasluge za razvoj sferne trigonometrije ima naš matematičar Ruđer Bošković (1711-1787), takođe i astronom, fizičar i filozof.

Posebnu važnost u sve široj primeni trigonometrijskih funkcija dali su redovi Furije (1768-1830). Furije je trigonometrijskim polinomima i redovima prikazivao

druge funkcije što u modernoj matematici, kako teorijskoj tako i u primenjenoj, ima ogroman značaj.

O LOGARITMIMA I EKSPONENCIJALNIM FUNKCIJAMA

Iz potreba nauke, naročito astronomije, dolazi do otrića logaritma. Iz praktičnih merenja dobijani su višecifreni brojevi sa kojima je računanje bilo teško.

Najstarije ideje logaritma mogu se naći kod velikog grčkog matematičara Arhimeda (287-212 p.n.e.), koji je uočio vezu između članova aritmetičkog niza i geometrijskog niza za $q=2$

0	1	2	3	4	5	6	...
1	2	4	8	16	32	64	...

Da bi izračunali proizvod $4 \cdot 8$, dovoljno je sabrati brojeve 2 i 3 iz gornjeg niza, tj $2+3=5$, i ispred broja 5 pročitati njegov odgovarajući broj (32).

U XV veku došlo se na ideju da se množenje svede na sabiranje a deljenje na oduzimanje.

Johan Verner (*Johan Werner 1468-1522*) nemački astronom i matematičar dolazi do jedne metode koja je nazvana prostaferesis. On proizvod trigonometrijskih funkcija pretvara u zbir.

Tim metodom služio se i danski astronom Tiho Brahe (*Tycho Brahe 1546- 1601*), u svojim računima.

Nikola Šike (*Nicolaus Chuqnet*) lekar iz Lina je množenje stepena istih osnova sveo na sabiranje eksponenata. Mihael Štifel (*Michael Stiefel*) upotrebio je i negativne eksponente.

Sa otkrićem decimalnih brojeva (oko 1600. god) dolazi do novih saznanja o logaritmima. Tu je doprinos dao škotski matematičar Džon Neper (*John Napier of Marchiston 1550- 1617*). Od njega potiče naziv logaritama. Ova reč je nastala od grčkih reči *logos*(odnos) *aritmos*(broj).

Neper je sastavio i prve logaritamske tablice koje su izašle 1614. godine. Složena trigonometrijska izračunavanja su znatno uprošćena.

Osnova Neperove metode je u konstrukciji dva niza, od kojih je prvi geometrijski, a drugi aritmetički, a konstruisani su tako da članovi drugog niza budu logaritmi odgovarajućih članova prvog.

O pojmu logaritma znao je i Švajcarac Jost Birgi (*Jost Biirgi 1552-1632*), i postupao slično Neperu.

Merkator (*Mercator Nikolaus Kauffman 1619-1687*) je definisao $\ln x$ putem integrala.

Značajno mesto u nalaženju logaritma imao je engleski matematičar Henri Brigs (*Henry Briggs 1556-1630*)

U XVIII veku posebno mesto pripada švajcarskom matematičaru Ojleru (*Euler, 1707-1783*). Ojler je godine 1748. objavio :”Uvod u infinitezimalnu analizu“, u kojoj proučava funkcije, a naročito logaritamske i eksponencijalne, a bavi se i razvijanjem u redove i beskonačnim proizvodima.

Ojler dolazi do formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Interesantno je da se u periodu XVIII i XIX vek logaritmi izračunavaju sa velikim brojem decimala . Nemački matematičar Karl Fridrih Gaus smatra da je manje značajan broj decimala , a da je znatno važnija procena granice tačnosti izračunatog algoritma i pri računanju određuje granicu tačnosti.

O MATEMATIČKOJ LOGICI

Ideja da je matematika deduktivna nauka počinje sa Talesom iz Mileta (624-545 p.n.e) . Prvu sistematizaciju znanja o logici dao je Aristotel (384-322 p.n.e)

Svakako , treba spomenuti i paradokse Epimenide (oko 600 p.n.e) i paradoks Zenona . Matematička logika zvanično se pominje u publikaciji iz 1847 Džordž Bula (1815 1864) . Matematička analiza logike . Spomenimo De Morgana i njegove tautologije iz 1860. god. , kao i knjigu Dževonsa “Osnovne lekcije iz logike” . Dijagrami Venea objavljeni su 1881. god. Takodje, poznata je i knjiga Luisa Kerola iz 1886. god. Krajem 19 veka Šreder uvodi algoritme u Logiku. Naslednici Šredera početkom 20. veka bili su Lovenhajm i Skolem . Spomenimo još Hilberta , zatim Rasela i Vajtheda (i njihovu knjigu “Principi Matematike” 1910-1913) kao i Fregea.

Ne smemo zaboraviti najveće ime 20 veka Kurt Gedela čiji su rezultati izmenili pogled na matematiku.

O PRIMENI GEOMETRIJE ZA REŠAVANJE KVADRATNE JEDNAČINE

Istorijski gledano geometrijske metode za rešavanje kvadratnih jednačina pojavile su se prve . One su interesantne učeniku jer povezuju različite oblasti matematike . Za njih su znali Vavilonci (oko 1500 godina p.n.e.).

Takodje , poznavali su ih i antički Grci . Kako Grci nisu znali za negativne brojeve to su oni rešavali razne probleme koji se svode na kvadratne jednačine, a koje su imale bar jedno pozitivno rešenje. Tako Euklid u svojim “Elementima “ (300 p.n.e.) rešava jednačine oblika

$$(1) x^2 + p x = q \quad (2) x^2 + q = p x \quad (3) x^2 = p x + q$$

Gde su p,q pozitivni brojevi. Te metode bile su poznate i Arapskim matematičarima .

Tako Alhvarizmi rešava sledeći zadatak : “ Nadjj broj čiji kvadrat , uvećan za svoju desetostruku vrednost daje broj 39 “ ($x^2 + 10 x = 39$) Takodje , italijanski matematičar Kardano (XVI vek) rešava jednačinu $x^2 + p x = q$

Poznato je i rešenje Marina Getaldića (XVII vek) . On rešava jednačinu $x^2 + p x = q^2$

Dr Zagorka Lozanov-Crvenković

KAKO JE STATISTIKA UNELA REVOLUCIJU U NAUKU DVADESETOG VEKA

- Da li postoji razlika u ukusu čaja sa mlekom ako se prvo sipa čaj ili mleko i kako je to uticalo na razvitak planiranja eksperimenta?
- Šta je Napoleon zamerio Laplasu?
- Koja je veza između K. Pirsona i K. Marksa?
- Koje su razlike između K. Pirsona i R.A Fišera?
- Kako je Ginisova pivara pomogla razvitak statistike?
- Da li je probit analiza nastala u Staljinovoj Rusiji?
- Ko je Mocart, a ko Pikaso matematike?

Nauka je ušla u devetnaesti vek sa čvrstom filozofskom vizijom koja bi se mogla nazvati „clockwork universe“. Naučnici su smatrali da se pomoću malog broja matematičkih formula kao što su Njutnovi zakoni kretanja i Bojlovi zakoni o gasovima, može opisati realnost i predvideti budući događaji. Sve što je bilo potrebno za predviđanje bio je kompletan skup takvih formula i za njih vezana merenja koja su dobijena sa dovoljnom preciznošću. Međutim, običnim ljudima je bilo potrebno više od četrdeset godina da prihvate takav pogled na svet.

Tipičan primer za ovaj raskorak je razgovor između Napoleona i P.S. Laplasa. Laplas je napisao veliko delo u kome je opisao kako da se izračunaju budući položaju planeta na osnovu posmatranja sa Zemlje. Priča se da mu je Napoleon kazao: „Ne vidim da spominjete Boga u svom radu gospodine Laplas“, na šta je Laplas odgovorio: „Ta pretpostavka mi nije bila potrebna.“.

Međutim, dokaz ovog novog naučnog stava se pojavio 1840. godine, kada su Njutnovi zakoni iskorišćeni da se predvidi postojanje planete Neptun, i kada je ona pronađena tamo gde su proračuni i predvideli. Sav otpor novom viđenju sveta se srušio.

Međutim, iako Laplasu nije bio potreban Bog u njegovim izračunavanjima, njemu je ipak bilo potrebno nešto što je nazivao „funkcija greške“ – error function. Posmatranja planeta i kometa nisu se u potpunosti slagala sa predviđenim položajima. Laplas i njegove kolege su te greške pripisali greškama u posmatranjima, nekad zbog promena u atmosferi, nekad zbog ljudske greške. Sve ove greške skupili su u poseban deo - „funkciju greške“ koju su dodali svojim matematičkim modelima. Smatrali su, da će se ova greška smanjivati kako instrumenti budu bili precizniji. Ali, krajem devetnaestog veka greške su se nagomilavale, umesto da se smanjuju. Pokušaji da se otkriju zakoni u biologiji nisu uspeali. U fizici i hemiji, pokazalo se da su Njutnovi zakoni samo grube aproksimacije. Malo po malo nauka je počela da koristi novi, statistički model stvarnosti. Do kraja dvadesetog veka skoro sve nauke su počele da koriste statističke modele.

Obični ljudi su opet kasnili u prihvatanju ove naučne revolucije. Pojmovi kao korelacija, rizik, šansa, su se pojavile u svakodnevnom govoru, i većina ljudi je svesna neodređenosti koja se pojavljuje u naukama kao što su medicina ili ekonomija, ali mali broj ne naučnika je bio u mogućnosti da shvati ovaj duboki pomak u filozofskom shvatanju realnosti.

Jedan od razloga zašto je to tako je to što sam koncept a ni teorija verovatnoće nije tada bio dovoljno razvijen. Uprkos tome, pojam statističke raspodele se već pokazao

korisnim.

Karl Pearson. Kao i u drugim revolucijama vezanim za ljudsku misao, teško je odrediti tačan momenat kada je ideja statističkog modela postala deo nauke. Neki primeri se mogu naći u radovima nemačkih i engleskih naučnika u ranom devetnaestom veku, a neki nagoveštaji postoje i u radovima Johana Keplera. Početak statističke revolucije možemo povezati sa radom Karla Pearsona 1890-tim. Charles Darwin je ukazao na biološke varijacije kao osnovu života, i na njima zasnovao svoju teoriju o opstanku vrsta. Ali njegov kolega, Karl Pearson je prvi ukazao na statističku prirodu koja leži u osnovi ovog problema, i koja nudi nešto različito od determinističkog stanovišta nauke devetnaestog veka.

K. Pearson je bio pod uticajem drugog engleskog naučnika, Sir Fransis Galtona. Za većinu ljudi, Galton je poznat kao „pronalazač” otisaka prstiju, odnosno metoda kako da se oni klasifikuju i indentifikuju. Veoma bogat, on je bio amater naučnik, koji je pokušavao da u biologiju unese matematičku strogost. Jedno od njegovih prvih istraživanja odnosilo se na naslednost osobine genijalnosti. Prikupljao je podatke o parovima sinova i očeva koji su bili poznati po visokoj inteligenciji. Međutim, problem se pokazao veoma komplikovanim, između ostalog jer u to vreme nije postojala dobra mera inetligencije. Zato je počeo proučavanje naslednih osobina koje su se mogle lakše meriti, kao što je visina. Otkrio je pojavu koju je nazvao “regresija prema srednjem”, a ona nije vezana samo za ljusku vrstu. Ona se pojavljuje u skoro svim naučnim posmatranjima. Galton je uveo meru povezanosti, koeficijent korelacije, i dao formulu za izračunavanje, a pojam korelacija se odomaćio u svakodnevnom govoru, često da označi nesto mnogo neodređenije nego što je Galtonov koeficijent. Sa svojom formulom za korelaciju, Galton se približio novoj, revolucionarnoj ideji koja će promeniti nauku u dvadesetom veku, ali je ovu ideju prvi putpuno formulisao njegov učenik, K. Pearson.

Pirsonova ideja je da na rezultate eksperimenta ne treba gledati kao na brojeve same po sebi, već kao primere rasipanja brojeva, bolje rečeno *raspodele brojeva*. Ova raspodela brojeva se može napisati kao matematičko formula pomoću koje se može odrediti verovatnoća da će posmatrani broj biti izmeren kao unapred zadati broj. Koju će vrednost imati merenje u pojedinačnom eksperimentu se ne može u napred odrediti. Možemo samo govoriti o verovatnoćama pojedinih vrednosti. Rezultati pojedinih eksperimenata su slučajni, u smislu da se ne mogu predvideti. Statistički model raspodele može, međutim, omogućiti da se opiše matematička priroda ove slučajnost.

Bilo je potrebno vreme da naučnici prihvate slučajnost koja je svojstvena merenjima. Neodređenost ne nastaje zbog nepreciznosti merenja, ona je svojstvena prirodi. U početku su se odstupanja smeštala u posebni deo, grešku pri merenju. Tako je u svojim radovima Laplas opisao prvu raspodelu verovatnoća, raspodelu greške. Ova raspodela je u svakodnevni govor ušla kao ”zvonasta kriva” ili normalna raspodela¹.

Pearson je otišao i korak dalje, shvatajući sama merenja, a ne njihove greške kao nešto što ima raspodelu vrerovatnoća. Što god da merimo, je deo slučajnog rasipanja

¹ Ova raspodela sa naziva i Gausova raspodela, u čast onoga za koga se veruje da ju je prvi formulisao, iako je to pre Gausa uradio Abraham de Moivre. Postoje i razlozi zbog kojih se može verovati da je ovu formulu koristio i Daniel Bernouli i pre toga. Sve ovo je primer onoga što Stephen Stigler, istoričar nauke, naziva zakon mizonomije, da nista u matematici nije nazvano po osobi koja ga je otkrila.

(random scatter), čije se verovatnoće opisuju funkcijama raspodele. On je otkrio familiju raspodela koje je nazvao “skew distribution” i to bi moralo, po njegovom ubeđenju da opiše svaki tip rasipanja koje se dobija iz podataka. Svaka od raspodela u njegovoj familiji je bila opisana za četiri broja. Ovi brojevi koji opisuju pojedinačne raspodele nisu bili “brojevi” iste vrste kao merenja. Ovi brojevi se nikad ne mogu posmatrati, ali se o njima mogu izvesti zaključci iz načina na koji se merenja rasipaju. Ovi brojevi su kasnije nazvani *parametri*. To su:

- srednja vrednost – centralna vrednost oko koje se merenja rasipaju,
- standardna devijacija – koliko se merenja rasipaju oko srednje vrednosti,
- simetrija – koliko se merenja “gomilaju” sa jedne stranu srednje vrednosti,
- kurtosis – koliko retko se merena rasipaju oko srednje vrednosti.

Pearson je u kasnim tridesetim preuzeo Galtonovu laboratoriju i rukovodio legijama mladih žena, koje su nazivane kalkulatori, da izračunavaju parametre raspodela za podatke koje je Galton prikupio u svojim merenjima. Na početku novog veka Galton, Pearson i Raphael Weldon udružili su snage i osnovali novi časopis koji će primenjivati Pearsonove ideje na biološke podatke. Jedan od ciljeva koji su sebi postavili je da dokažu teoriju Charlesa Darwina o poretku vrsta. Nazvali su ga *Biometrika*. Galton je iskoristio svoje bogatstvo da osnuje zadužbinu (trust fund) koja će finansirati ovaj časopis. Štampan je na visoko kvalitetnom papiru, sa fotografijama u boji, a i najkomplikovanije matematičke formule su štampane, bez obzira na cenu. Sledećih dvadeset pet godina *Biometrika* je donosila podatke od korespondenata koji su rasuti po celom svetu slali svoja merenja raznih životinjskih vrsta. Za ove podatke, Pearson i njegovi kalkulatori su izračunavali četiri parametra raspodele. Grafički su predstavljane raspodele koje su se najbolje slagale sa podacima i komentarisane su razlike podataka od nekih sličnih podataka. Među ovakvim člancima, u časopisu su se pojavljivali i oni koji su u sebi uključivali i matematički pristup problemima, među njima je bio objavljen 1908. godine i rad nepoznatog autora koji je pisao pod pseudonimom Student. Galton je umro 1911. godina, Weldon je pre toga poginuo u nesreći na skijanju, pa je Pearson ostao jedini urednik *Biometrike* i sam je raspolagao zadužbinskim novcem. Sledećih dvadeset godina *Biometrika* je postala Pearsonov privatni časopis, u kome je štampano samo ono što je Pearson smatrao važnim.

William Sealy Gosset. Stara i poštovana firma, Ginisova pivara, Guinness Brewing Company iz Dablina, početkom dvadesetog veka je počela da investira u nauku. Mladi Lord Guinness je, nasledivši preduzeće, odlučio da uvede moderne naučne metode u proizvodnji zapošljavajući mlade, uspešnog diplomca hemije iz Oxforda i Cambridgea. 1899. godine je zaposlio William Sealy Gosseta, koji je sa dvadeset dve godine diplomirao hemiju i matematiku na Oxfordu. U svom prvom objavljenim radu, 1904. godine, Gosset iznosi matematičko rešenje problema koji je vezan za proizvodnju piva. Kada se smesa sprema za fermentaciju, dodaje joj se pažljivo merena količina kvasca. Kvasac je čuvan u posudama punim tečnosti pre dodavanja u smesu, i radnici su morali da izmere koliko kvasca ima u kojoj posudi, da bi znali koliko tečnosti da sipaju u posudu. Iz posude su uzimali uzorke i pod mikroskopom brojali ćelije kvasca. Važno je bilo znati tačnost takvih merenja, jer je količina kvasca morala biti strogo kontrolisana. Suviše malo kvasca nije izazivalo fermentaciju, a previše mnogo je davalo gorko pivo.

Ovo se poklapalo sa Pearsonovim pristupom nauci. Merenja su bila broj ćelija

kvasca u uzorku, ali „stvar“ koju su pokušavali odrediti je bila koncentracija kvasca u posudi. Kako su u pitanju živi organizmi, ćelije koje se stalno razmnožavaju, ta „stvar“ koju su merili nije stvarno postojala. Ono što je postojalo je raspodela broja ćelija u jedinici zapremine. Gosset je ispitujući podatke, zaključio da se broj ćelija kvasca može modelirati pomoću Poissonove² raspodele. Pomoću toga je bio u mogućnosti da uvede nove metode merenja koje su na osnovu uzorka davale tačnije podatke o koncentraciji ćelije kvasca u posudama, što je omogućilo pivari da proizvede pivo postojanijeg kvaliteta.

Gosset je želeo da objavi rezultat u odgovarajućem časopisu. Međutim, politika kompanije Guinness je zabranjivala publikacije svojih zaposlenih, jer je nekoliko godina ranije jedan od zaposlenih u pivari objavio rad u kome je otkrio tajne komponente jednog od procesa vrenja. Gosset se sprijateljio sa Pearsonom, koji je tada bio urednik Biometrike, a Pearson je bio impresioniran Gossetovim matematičkim sposobnostima. 1906. godine Gosset je otišao na jednogodišnje usavršavanje u Pearsonovu Biometrijsku laboratoriju. Želeći da objavi Gossetov rezultat, Pearson ga je objavio pod pseudonimom Student

Ronald Aylmer Fisher. Ronald Aylmer Fisher je rođen 1890. godine. Vrlo rano se zainteresovao za matematiku i astronomiju. Kako zbog slabog vida nije smeo da koristi električno svetlo, njegov tutor iz matematike je uveče radio sa njime bez pomoći papira i olovke. Zahvaljujući tome, Fisher je razvio geometrijsko shvatanje. U budućnosti, njegovo neuobičajene geometrijske sposobnosti će mu pomoći da reši teške probleme u matematici i statistici. Studije u Camebridgeu je počeo 1909. godine a prestižnu titulu wrangler je stekao 1912. godine. Još kao student publikovao je prvi naučni rad u kome su komplikovane iterativne formule izražavaju u terminima višedimenzionalnog prostora. Kao diplomirani student jednu godinu je proveo proučavajući statističku mehaniku i kvantnu teoriju, u kojima su se već primenjivale metode statističkih distribucija.

Postoje filozofske razlike između Pearsonovog i Fisherovog pristupa raspodelama. Karl Pearson je smatrao da statističke raspodele opisuju stvarne skupove podataka, koje je analizirao. Za njega je raspodela merenja bila stvarna, smatrao je da postoji velika, ali konačna kolekcija merenja za datu vrednost. Idealno, naučnik bi mogao da prikupi sva merenja i odredi parametre raspodele. Ako nije u mogućnosti da prikupi sve podatke, uzimao bi veliki uzorak. Parametri određeni na osnovu velikog, reprezentativnog uzorka bi bili isti kao i parametri cele populacije, bez velike greške.

Prema Fisheru, raspodela je apstraktna matematička formula, a prikupljeni podaci se mogu koristiti samo da se ocene parametri takve raspodele. Merenja su bila slučajni izbor iz skupa svih mogućih merenja. Ocene, dobijene na ovakvom slučajnom izboru su slučajne i imaju svoju raspodelu. Tridesetih godina dvadesetog veka je izgledalo da je Fisherov stav pobedio. Sedamdesetih Pearsonov pogled je ponovo prihvaćen. I danas su statističari podeljeni oko ovog pitanja.

Fisher je, da bi razlikovao ocene od parametara raspodele uveo pojam “statistika” Kako sve ocene sadrže greške, Fisher je predložio analize koje će minimizirati stepen takvih grešaka i dati ocene biže stvarnim vrednostima nego bilo koja druga analiza. Kako je statistika slučajna promenljiva, nema smisla govoriti koliko je tačna jedna njena vrednost, odnosno nema smisla govoriti koliko je tačno jedno merenje. Ono što je

² Poissonova raspodela je još jedan primer mizonomije, jer ju je, iako je nazvana po Simeon Denis Poissonu, pre njega opisao jedan od Bernulija

potrebno je kriterijum koji zavisi od raspodele verovatnoća statistike. Fišer je predložio nekoliko kriterijuma: konzistentnost (što je više podataka, veća je verovatnoća da je će dobiti vrednost statistike biti blizu stvarne vrednosti parametra), nepristrasnost (ako se statistika primeni na više skupova podataka, srednja vrednost dobijenih vrednosti je bliska stvarnoj vrednosti), efikasnost (većina od velikog broja podataka je blizu stvarne vrednosti parametra.). Kasnije je predložio još neke kriterijume, a statističari posle Fishera su uveli i druge kriterijume. Da bi dobio konzistentne i efikasne ocene, Fisher je uveo pojam ocene maksimalne verodostojnosti. Pokazao je da su takve ocene uvek konzistentne a da su za regularne familije najefikasnije, dok se pristrasnost može otkloniti kod takvih statistika.

Uveo je veliki broj testova značajnosti koji su danas u upotrebi, a verovatnoću koja vodi zaključku da su razlike značajne nazvao je p – vrednost. Veliki deo knjiga *Statistical Methods for Research Workers* je posvećen pokazivanju kako da se izračuna p -vrednost.

Mocart matematike. Fisher nije bio jedini genij kada je u pitanju razvoj statističkih metoda u dvadesetom veku. Andrej Nikolajevič Kolmogorov, trinaest godina mlađi od Fishera je ima ogroman uticaj na razvoj teorije verovatnoće i matematičke statistike. Rođen je 1903. godine u južnoj Rusiji. S pet godina otkrio je da je suma prvih k neparnih brojeva jednaka kvadratu od k , a ovaj rezultat je objavljen u časopisu lokalne škole, u kome su objavljeni i drugi njegovi rezultati, kao na primer: Na koliko načina je moguće zašiti dugme sa četiri rupe?

U četrnaestoj, Kolmogorov je iz enciklopedija naučio višu matematiku, dajući dokaze koji su nedostajali. U srednjoj školi izluđivao je profesora fizike, praveći niz perpetuum mobile mašina, u kojima profesor nije mogao da nađe grešku (koju je Kolmogorov pažljivo sakrio) . Pre roka je završio srednju školu i sa sedamnaest godina u Moskvi se upisao na Univerzitet. Na poslediplomskim studijama iz matematike bilo je 14 predmeta, a završni ispit se sastojao od originalnog rada iz jednog od predmeta po izboru. Malo koji student je davao više od jednog rada. Kolmogorov je dao originalne rezultate iz svih 14 predmeta.

Kolmogorov je jedan od najvećih matematičara dvadesetog veka, koji je dao veliki broj originalnih rezultata u raznim oblastima nauke, a pri tome je, za dokazivanje pronalazio sasvim originalne metode i tehnike. Lakše je navesti oblasti matematike, fizike, biologije i filozofije u kojima Kolmogorov *nije* dao imao velik uticaj, nego navesti spisak oblasti u kojima je ostavio traga. Mora se takođe istaći njegov požrtvovan rad sa mladima.

Za statistiku su najvažnija njegova rešenja dva problema:

1. Matematičko zasnivanje teorije verovatnoće;
2. Rad na problemima koji uključuju zavisne podatke, odnosno na slučajnim procesima.

Međutim, Kolmogorov se suočio sa problemom, a to je:

Šta znači verovatnoća u stvarnom životu?

Pronalaženje odgovora na ovo pitanje je obično vezano za davanje realnog smisla Kolmogorovljevom apstraktnom prostoru verovatnoće. Sam Kolmogorov je izabrao drugačiji pristup. Kombinujući ideje iz zakona termodinamike, ranih radova K. Pearsona, radove vezane za teoriju informacija, rezultate o zakonima velikih brojeva P. Levija , dao je novi pristup teoriji verovatnoće, vezan za kompleksnost algoritama, ali ovaj rad nije

stigao da završi, a niko drugi nije uspeo da nastavi njegov rad.

Pikaso statistike. John Tukey je rođen 1915. godine. Završio je studije hemije. Nastavio je poslediplomske studije na Prinstonu, gde je doktorirao 1939. Prvi radovi su mu bili iz topologije, gde je njegov najvažniji doprinos poznat kao Takijeva lema. Samuel S. Wilks ga je regrutovao za rad u statistici.

Tokom drugog svetskog rata, Tukey je radio u Fire Control Research Office na praktičnim problemima. Ovo iskustvo mu je kasnije koristilo u statističkim istraživanjima i navelo ga da ceni praktične probleme. Poznat je njegov aforizam: *Bolje je dati približan odgovor na ispravno pitanje nego tačan odgovor na pogrešno pitanje.* Kao što Pikasov rad zadivljuje svojom raznovrsnošću - monohromatske slike, kubizam, oblici klasicizma, keramika, gde u svakoj ovoj oblasti uvodi revolucionarne izmene, slično impresionira raznovrsnost Tukeyvih doprinosa matematici. Bavio se slučajnim procesima, gde je pronašao kompjuterske tehnike za analiziranje dugih nizova korelisanih podataka, poznate kao Fast Fourier transform. U statistici uveo je exploratory data analysis, box & whiskers i stem & leaf dijagrame. Uveo je reči *bit* i *software*. Takođe, sem vremenskih serija, bavio se linearnim modelima, generalisao je neke Fisherove rane radove, robusnim metodama. Gde god je ostavio svoj trag, statistika više nije bila ista.

Literatura:

1. D. Salsburg: *The Lady Tasting Tea*, W.H Freeman and Company, 2001.
2. C.C. Heyde: E. Seneta, *Statisticians of the Centuries*, Springer-Verlag, 2001.
3. D. Gillies: *Philosophical Theories of Probability*, Routledge, Taylor & Francis Group, 2003.
4. E. Beltrami: *What is Random?, Chance and Order in Mathematics and Life*, Springer – Verlag, 1999.

dr Nevena Pušić,
redovni profesor PMF

O geometrijskim konstrukcijama koje se izvršavaju ograničenim sredstvima

Nije uopšte potrebno ponovo govoriti o doprinosu matematičara antičke Grčke– posebno onih iz helenističkog perioda–razvoju geometrijske misli. Suvišno bi ovde bilo nabrajati koliko su geometriji doprineli Euklid, Apolonije ili Arhimed. Geometrija je jedna od najstarijih matematičkih disciplina i jedna od najstarijih nauka uopšte.

Od antike su kao izazov za korišćenje i produbljivanje geometrijskih znanja bili korišćeni razni konstruktivni problemi. I danas oni imaju svoje istaknuto mesto u nastavi matematike, kako u osnovnim, tako i u srednjim školama. Nastavnici koji predaju druge predmete često su prilici da požale što nemaju na raspolaganju način rada kakav matematičari pružaju konstruktivni problemi: razvijaju strogost u rezonovanju, teraju na ispunjenje formalizma, razvijaju algoritmičan način razmišljanja, podstiču maštu, klasifikuju ideje. Nadasve, učenicima koji imaju imalo sklonosti za matematiku pružaju neizmerno zadovoljstvo. Međutim, velika je odgovornost nastavnika koji koriste ovaj način rada, kako u izboru problema, tako i u moderiranju ovakvog načina rada, u podsticanju zdravog takmičenja, u sprečavanju apatije usled nedostatka ideja putem doziranog navođenja do sprečavanja nezdrave trke podsticanjem saradnje.

Standardna sredstva za izvođenje geometrijskih konstrukcija su lenjir i šestar, takođe još od antike. Međutim, i lenjira i šestara ima raznih. U principu, lenjir služi samo za povlačenje prave spajanjem dveju tačaka. Međutim, postoje i lenjiri sa podelom koji služe interpretaciji metričkih problema, lenjiri sa dvema paralelnim ivicama koji služe povlačenju paralelnih pravih, trouglovi koji služe crtanju uglova od 30° , 45° , 60° . Šestari takođe mogu biti različiti. U Euklidovo vreme, smatralo se da šestar kolabira čim se makar jedna njegova nožica podigne sa hartije. Kasnije se kao nova vrsta pribora pojavio «zarđali šestar»–šestar sa fiksnim otvorom. Tek kasnije se pojavio šestar sa prilagodljivim otvorom. Obično se smatra da su i stari Grci izvodili sve svoje konstrukcije pomoću lenjira i šestara. Oni su, zapravo, koristili i mnoge druge pribore, ali su najviše cenili one konstrukcije koje su izvedene pomoću ova dva. Kasnije se ispostavilo da svaka konstrukcija koja može da se izvede pomoću lenjira i kolabirajućeg šestara može da se izvede i pomoću lenjira i šestara sa prilagodljivim otvorom.

Dakle, lenjir i šestar u geometrijskoj konstrukciji nemaju prvenstveno karakter tehničkog, nego u prvom redu logičkog sredstva.

Još u XVII veku postalo je, doduše veoma ograničeno, poznato da se svaka geometrijska konstrukcija koja se može izvesti lenjirom i šestarom može izvesti i samo šestarom. Ova činjenica je postala šire poznata u XIX veku, pod nazivom Mor-Maskeronijeva teorema. U isto vreme, Ponsle je izneo pretpostavku, a Jakob Štajner dokazao da se svaka konstrukcija koja se može izvesti lenjirom i šestarom može izvesti i samo lenjirom, pod uslovom da je data kružnica i njen centar (teorema Ponsle-Štajnera). Obe ove teoreme se dokazuju na sličan način. Sastavi se spisak elementarnih konstrukcija pomoću kojih se izvode sve ostale i pokaže se da se one mogu, na neki način, izvesti bilo lenjirom, bilo šestarom.

Konstrukcija ograničenim sredstvima je konstrukcija bilo samo lenjirom, bilo samo šestarom. Ovde ćemo pokazati kakvo je logičko sredstvo lenjir i dati određen broj konstruktivnih problema koji se rešavaju lenjirom, podesna su i za decu školskog uzrasta, za dodatnu nastavu.