

# ELEMENTI DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA U SREDNJOJ ŠKOLI

**dr Ljiljana Petković, red. prof.**  
**Mašinski fakultet u Nišu**

Pojam funkcije je fundamentalan u matematici. Reč funkcija generalno izražava ideju da poznavanje jedne činjenice daje nam informaciju o drugoj. Na primer, brzina automobila je funkcija jačine motora, temperatura je funkcija godišnjeg doba.

U matematici se pojam *funkcija* koristi za predstavljanje zavisnosti jedne veličine od druge. Funkcija je pravilo po kome uzimamo neke brojeve kao ulazne veličine i svakom od njih pridodajemo određeni izlazni broj.

**Definicija.** *Neka su  $X$  i  $Y$  dva neprazna skupa. Pridruživanje (korespondencija, pravilo)  $f$  koje svakom elementu  $x \in X$  dodeljuje tačno jedan element  $f(x)$  skupa  $Y$  zove se preslikavanje skupa  $X$  u skup  $Y$ .*

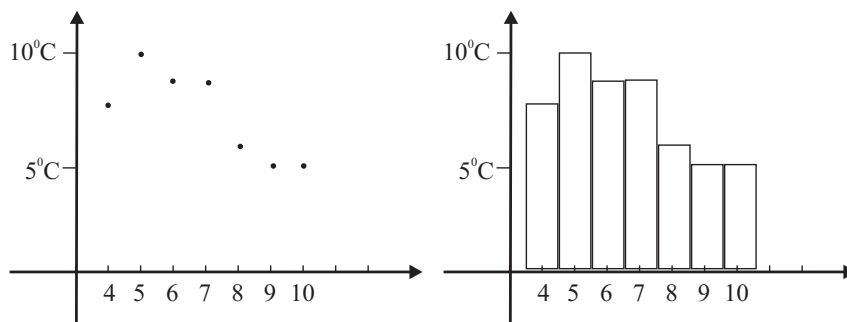
Ako su skupovi  $X$  i  $Y$  skupovi realnih brojeva  $R$ , tada govorimo o **realnoj funkciji realne promenljive**.

## Način zadavanja funkcije

1) TABELARNO: U eksperimentalnim naukama funkcija se zadaje pomoću tabele vrednosti. Na primer, sledeća tabela može predstavljati maksimalne dnevne temperature u Srbiji od 4-10. decembra 2008. godine:

Datum (dan)	4	5	6	7	8	9	10
Temper.	8°C	10°C	9°C	9°C	6°C	5°C	5°C

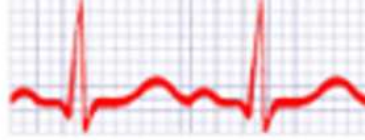
Mada ne postoji formula za temperaturu, ipak je zadovoljen osnovni uslov po kome se funkcija zadaje: svakom ulaznom podatku (datum) odgovara jedan izlazni podatak (temperatura). Podaci iz tabele mogu se na razne načine prikazati grafički.



Sledeća tabela prikazuje rast svetske populacije tokom vremena. Dat je broj u milionima ljudi:

70,000BC	10,000BC	9,000BC	8,000BC	7,000BC	6,000BC	5,000BC
< 1	1	3	5	7	10	15
4,000BC	3,000BC	2,000BC	1,000BC	500BC	1AD	1,000AD
20	25	35	50	100	200	310
1750	1800	1850BC	1900	1950	1999	2008
791	978	1,262	1,650	2,521	5,978	6,707

2) GRAFIČKI prikaz funkcija u nekim slučajevima je sasvim prirodan. Na primer, elektrokardiogram (EKG) predstavlja grafik funkcije srca (električne aktivnosti srca u funkciji vremena) sa koje lekar jednostavno uočava da li je srce zdravo i radi normalno ili ima smetnji u radu. Možda bi se i mogla konstruisati formula koja bi aproksimirala funkciju EKG-a ali u ovom slučaju to je nepotrebno. Lekar daleko jednostavnije prati grafik nego što bi to mogao na osnovu matematičkog izraza.



3) Ipak, kad kažemo funkcija, mi mnogo češće podrazumevamo funkciju koja je zadata ANALITIČKI, pomoću izraza ili formule:

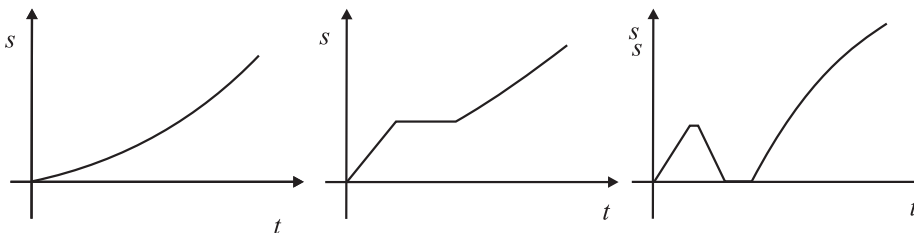
$$y = f(x)$$

Zavisno promenljiva  $y$  (izlazni podatak) zadata je kao analitički izraz u kome se kao argumenti javljaju nezavisno promenljiva  $x$  (ulazni podatak), brojne konstante i određene operacije:

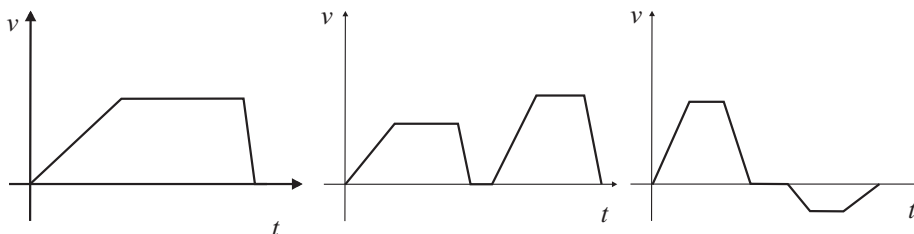
$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 2x^3 - 5, \quad h(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}, \quad t(x) = 2 \sin x + 5.$$

Na ovaj način funkcija je zadata matematički najpreciznije ali njene osobine nisu tako očigledne kao iz tabele ili sa grafika. Potrebno je sprovesti ispitivanje funkcije koje će dovesti do mogućnosti da se funkcija prikaže i grafički pomoću grafika.

**Primer:** Analizirati grafike funkcija prikazane na slici podrazumevajući da je prikazana zavisnost predjenog puta  $s$  od vremena  $t$ :



**Primer:** Dati moguće obrazloženje sledećih grafika funkcija podrazumevajući da je prikazana zavisnost brzine  $v$  od vremena  $t$ :



Uočiti na prethodnim graficima delove gde funkcija raste i gde opada.

**Primer:** Broj stanovnika grada  $P$  (u hiljadama) je funkcija vremena  $t$  koje je izraženo brojem godina posle 1980. Dakle,  $P = f(t)$ . Objasniti značenje izraza  $P(25) = 300$ .

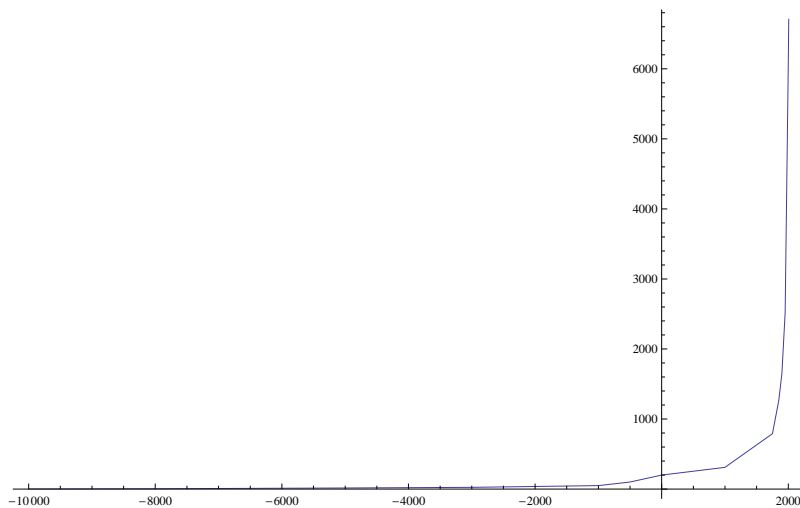
Jedan od veoma čestih oblika funkcionalne zavisnosti izmedju dveju promenljivih je njihova medjusobna **proporcionalnost**. Na primer, površina kruga je proporcionalna kvadratu poluprečnika:

$$P = f(r) = \pi r^2.$$

Broj  $\pi$  je konstanta proporcionalnosti. Proporcionalne veličine istovremeno se uvećavaju ili smanjuju.

**Primer:** Zapremina lopte je proporcionalna kubu njenog poluprečnika. Napisati ovu funkcionalnu zavisnost.

Drugi vid funkcionalne zavisnosti koja se često javlja u prirodi je **eksponencijalna** zavisnost. To su funkcije oblika  $f(x) = a^x$ , gde je  $a > 0$  konstanta a promenljiva  $x$  javlja se u eksponentu. Najčešće se kao primer eksponencijalne zavisnosti uzima rast populacije stanovništva, kao što je to dato u drugoj tabeli iz uvoda. Tabela sa podacima može se grafički prikazati na sledeći način:



Primećujemo da je karakteristika ove funkcije da u početku vrlo sporo raste a zatim je njen rast sve brži. Za velike argumente dobijaju se ekstremno velike vrednosti funkcije. Sledeći primer ilustruje neočekivano veliku vrednost eksponencijalne funkcije.

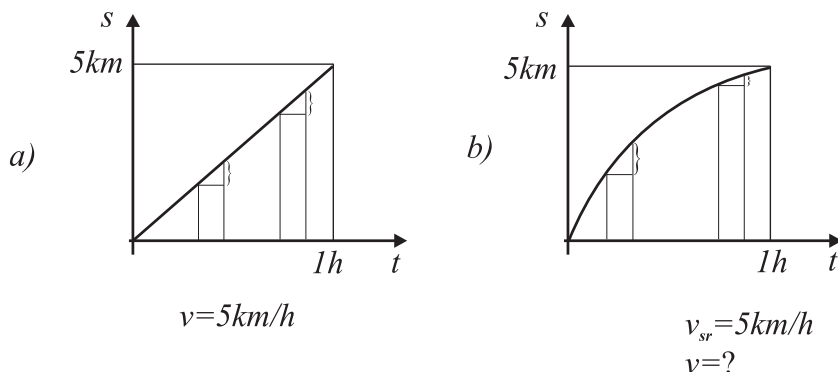
**Primer:** Pretpostavimo da imamo list papira debljine  $0,1mm$ . Ako papir presavijemo na pola, dobićemo dvaput veću debljinu, tj.  $2 \times 0,1mm$ . Ako sad ovo opet presavijemo na pola, dobiće se debljina  $2 \times (2 \times 0,1mm) = 2^2 \times 0,1mm$ . Ovaj proces možemo nastaviti i kod svakog novog presavijanja papira dobijamo dvaput veću debljinu.

*Pitanje:* Pod pretpostavkom da imamo dovoljno veliki list papira, kolika će biti dobijena debljina ako izvršimo presavijanje 50 puta?

*Odgovor:* a) Manje od  $50cm$ , b) Oko  $10m$ , c) Više od jednog kilometra.

## DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA

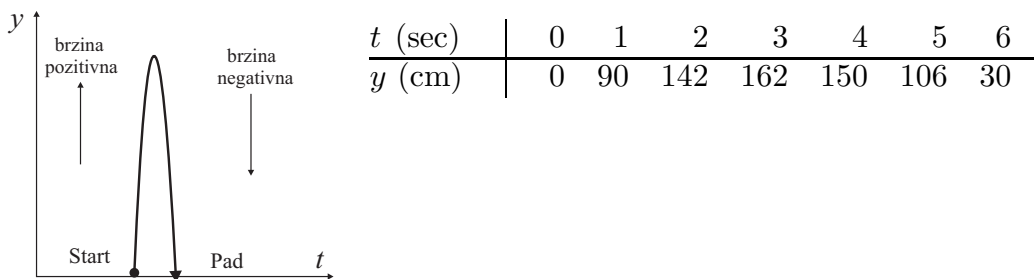
Posmatajmo sledeće grafike funkcija, koji prikazuju zavisnost predjenog puta od vremena kretanja. Svaki od grafika je različit mada je ukupno predjen isti put za isto vreme.



Na slici a) vidimo primer ravnomernog kretanja kada se u svim vremenskim intervalima jednake dužine, prelaze isti putevi. U tom slučaju i brzina je ravnomerna i u svakom trenutku iznosi  $5km/h$ .

Na slici b) predjen je ukupno isti put za isto vreme ali brzina kretanja nije bila ravnomerna jer se stalno smanjuje. Vidimo da se za iste vremenske intervale sada prelaze različiti putevi. Možemo naći srednju brzinu i ona je  $v_{sr} = 5km/h$  ali je brzina u svakom trenutku različita. Postavlja se pitanje da li možemo odrediti brzinu u nekom odredjenom trenutku.

Posmatrajmo jedan konkretan problem: *Odrediti brzinu loptice koja je izbačena uvis (vertikalni hitac) u trenutku  $t = 0$ .* Loptica započinje kretanje najvećom brzinom, zatim usporava sve dok u jednom trenutku ne zastane u vazduhu a zatim počinje da pada na dole sve više ubrzavajući dok ne udari u zemlju. Pretpostavimo da smo u stanju da merimo visinu loptice u svakom trenutku i da smo dobili ovakvu tabelu vrednosti:



Ako bismo na osnovu ovih podataka hteli da izračunamo prosečnu brzinu loptice na intervalu  $1 \leq t \leq 2$ , dobili bismo:

$$v_{sr} = \frac{142 - 90}{2 - 1} = 52cm/sec.$$

Na intervalu  $4 \leq t \leq 5$ , srednja brzina bila bi  $(106 - 150)/(5 - 4) = -44cm/sec$ . Negativna vrednost brzine u ovom slučaju znači da se visina loptice smanjuje i da se ona kreće naniže.

Opšta formula bi bila

$$\text{Prosečna brzina} = \frac{\text{Promena položaja loptice}}{\text{Promena vremena}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Medjutim, izračunavanjem srednje brzine ipak ne rešavamo problem izračunavanja brzine loptice u nekom vremenskom trenutku, na primer, za  $t = 1$ . Najbolju aproksimaciju dobićemo ako uzmemo srednju vrednost izmedju vrednosti na intervalu ispred  $t = 1$ , tj. na  $[0, 1]$  i na intervalu iza, tj. na  $[1, 2]$ . Kako je prva vrednost  $90\text{cm/sec}$  a druga  $52\text{cm/sec}$ , trebalo bi da brzina u  $t = 1$  bude približno  $71\text{cm/sec}$ . Za preciznije rezultate morali bismo da imamo manje intervale merenja.

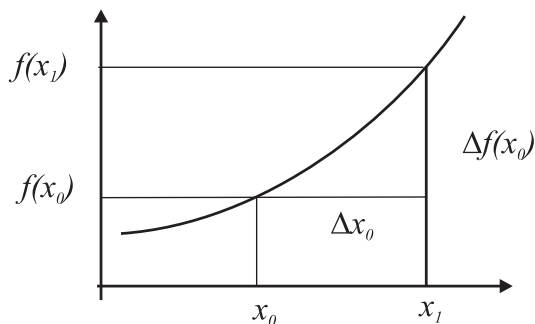
Ovim razmatranjem dolazimo do zaključka da će trenutna brzina predmeta u vremenskom trenutku  $t = a$  biti jednaka graničnoj vrednosti prosečne brzine na intervalu oko tačke  $a$ , pri čemu se dužina intervala  $h$  smanjuje i teži nuli. Drugim rečima, za izračunavanje trenutne brzine u vremenskom trenutku  $t = a$  imamo

$$\text{Brzina u trenutku } (t = a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h}.$$

### Definicija izvoda funkcije

Na osnovu prethodnog razmatranja, može se izvršiti generalizacija i definisati pojam prvog izvoda proizvoljne funkcije. Neka je data proizvoljna funkcija  $f : D \rightarrow R$ , i neka su  $x_0, x_1 \in D$ . Razlika  $x_1 - x_0$  zove se **priraštaj argumenta** i označava se sa  $\Delta x_0 = x_1 - x_0$  a razlika vrednosti funkcije zove se **priraštaj funkcije** i označava se  $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ . Priraštaj funkcije predstavlja količinu promene funkcije od  $x_0$  do  $x_1$ .

Postavlja se pitanje kakav je međusobni odnos priraštaja funkcije i priraštaja argumenta. Na slici a) vidimo da će ovaj količnik biti uvek isti ali sa slike b) vidi se da je on različit. Odnos priraštaja funkcije i priraštaja argumenta daje nam uvid u **brzinu** promene funkcije.



**Definicija.** Neka je funkcija  $f$  definisana u nekoj okolini tačke  $x_0$ . Ako postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tada se ona zove **prvi izvod funkcije**  $y = f(x)$  u tački  $x_0$ .

Ako označimo  $h = \Delta x = x - x_0$  i  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ , tada možemo pisati

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Operacija nalaženja izvoda funkcije zove se **diferenciranje**. Funkcija  $f$  koja ima konačan izvod u tački  $x_0$ , zove se **diferencijabilna** u tački  $x_0$ .

Funkcija je diferencijabilna na intervalu  $(a, b)$  ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala.

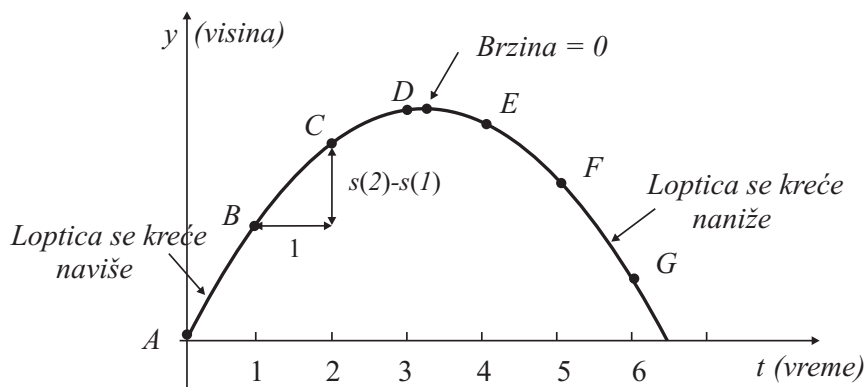
**Primer:** Kako glasi izvod konstantne funkcije?

Neka je data konstantna funkcija  $f(x) = c$ . Tada je grafik ove funkcije horizontalna linija. Funkcija ni za jednu vrednost argumenta  $x$  ne menja vrednost tako da je priraštaj jednak 0. Odatle sledi da je i izvod  $f'(x) = 0$ .

**Primer:** Na osnovu definicije naći  $f'(x)$  ako je  $f(x) = x^2$ . Kako glasi izvod funkcije  $f(x) = x^3$ ? Izvesti opšte pravilo za nalaženje izvoda funkcije  $f(x) = x^n$ ,  $n \in N$ .

## Geometrijsko tumačenje prvog izvoda

Pretpostavimo da sledeća slika predstavlja grafik kretanja loptice bačene uvis sve do njenog pada.



Visina  $y$  loptice bačene uvis u zavisnosti od vremena  $t$ .

Prikazan je grafik funkcije  $y = s(t)$  (predjeni put u funkciji vremena). Kako bi na gornjem grafiku mogla biti predstavljena prosečna brzina kretanja loptice u nekom vremenskom intervalu? Kao što je gore izračunato, na primer, na intervalu  $1 \leq t \leq 2$  imamo

$$\text{Prosečna brzina} = \frac{\text{Promena položaja}}{\text{Promena vremena}} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{142 - 90}{1} = 52 \text{ cm/sec.}$$

S druge strane, ako bismo spojili tačke grafika  $B$  i  $C$ , dobili bismo pravu (sečicu grafika funkcije) čiji koeficijent pravca je upravo gore sračunati količnik. Možemo zaključiti: *Prosečna brzina u nekom vremenskom intervalu  $a \leq t \leq b$  jednaka je koeficijentu pravca (nagibu) prave koja na grafiku funkcije  $y = s(t)$  spaja tačke sa argumentima  $t = a$  i  $t = b$ .*

Za izračunavanje brzine u određenoj tački neophodno je smanjivati posmatrani vremenski interval tako da on teži nuli, odnosno, neophodno je preći na granični proces. Stoga ćemo posmatrati opšti slučaj kada je u pitanju proizvoljna funkcija.

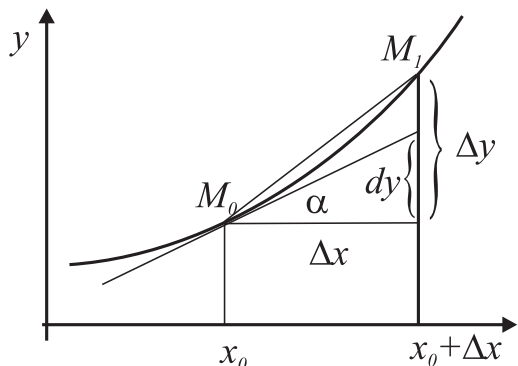
Neka su  $M_0(x_0, f(x_0))$  i  $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  dve tačke na grafiku funkcije  $y = f(x)$ . Prava povučena kroz ove dve tačke ima koeficijent pravca

$$k_s = \text{tg } \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

U graničnom procesu ako  $\Delta x \rightarrow 0$ , tada se tačka  $M_1$  kreće duž grafika i sve više približava tački  $M_0$ . Istovremeno, sečica kroz  $M_0$  i  $M_1$  menja svoj pravac i zauzima konačan položaj tangente na grafik funkcije u tački  $M_0$ . Pritom, za koeficijent pravca tangente imamo

$$k_t = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Razlika između priraštaja  $\Delta y$  i diferencijala  $dy$  prikazana je na slici.



**Primer:** Zakon kretanja tačke je  $s = 3t^2 + 2t + 1$ , gde je  $s$  rastojanje u metrima a  $t$  vreme u sekundama. Odrediti predjeni put i brzinu tačke u trenutku  $t = 2$ .

**Primer:** Telo je izbačeno vertikalno uvis brzinom od  $10\text{m/sec}$ . Odrediti najvišu tačku koju ono dostiže i trenutak kada će udariti u zemlju.

### Jednačina tangente i normale na grafik krive

U tački  $M_0(x_0, f(x_0))$

- jednačina tangente na grafik funkcije:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- jednačina normale:  $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$ .

**Primer:** Napisati jednačinu tangente na grafik krive

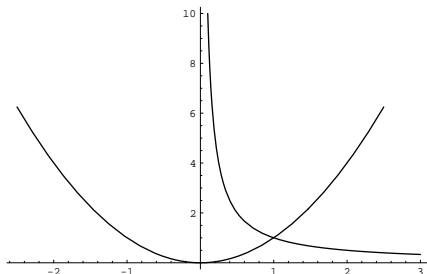
a)  $f(x) = x^2$ , u tačkama  $A(1, 1), B(-1, 1), C(2, 4), O(0, 0)$ ;

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , u tačkama  $M(1, 1), N(2, 1/2)$ .

c)  $f(x) = x^2 + x$  u tački  $P(3, 12)$ .

Skicirati grafik funkcije i traženu tangentu.

**Primer:** Naći ugao između tangenti konstruisanih u presečnoj tački krivih  $y = 1/x$  i  $y = x^2$ .



**Primer:** Naći jednačine tangenti na krivu  $y = \sin x$  u tačkama  $x = 0$  i  $x = \pi/3$ . Aproximirajući krivu  $\sin x$  pomoću dobijenih jednačina, naći približnu vrednost za  $\sin(\pi/6)$ . Da li je tačnost ista u oba slučaja?

## NEODREDJENI INTEGRAL

Sledeći problem koji ćemo razmotriti je problem analitičkog određivanja funkcije  $f$  ako je dat njen izvod  $f'$ . Ovo je proces koji je inverzan procesu diferenciranja funkcije. Najpre ćemo definisati pojam primitivne funkcije za datu funkciju.

### Primitivna funkcija

Neka je data funkcija  $f : (a, b) \rightarrow R$ .

**Definicija.** Za funkciju  $f$  definisanu na intervalu  $(a, b)$  kaže se da ima **primitivnu funkciju**  $F$  na  $(a, b)$  ako  $\forall x \in (a, b) \Rightarrow F'(x) = f(x)$ .

**Primer:**  $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$  i  $F'(x) = 3x^2$ .

Primitimo da iz definicije ne sledi da svaka funkcija ima primitivnu funkciju.

Pitanje jednoznačnosti primitivne funkcije rešava sledeća teorema.

**Teorema.** Ako je na intervalu  $(a, b)$  funkcija  $F$  primitivna za funkciju  $f$ , tada je i  $F + C$ , gde je  $C$  proizvoljna konstanta, takodje primitivna za  $f$ .

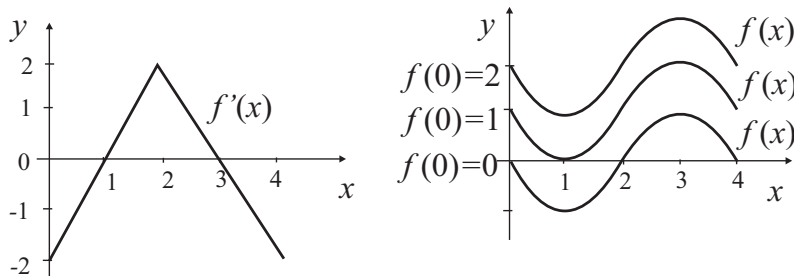
Dokaz:  $\forall x \in (a, b) F'(x) = f(x) \Rightarrow \forall x \in (a, b) (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

Zaključujemo da ako funkcija ima primitivnu funkciju, tada ona ima familiju primitivnih funkcija.

**Primer:** Neka je  $v$  brzina automobila a  $s$  njegova pozicija u zavisnosti od vremena  $t$ . Tada je  $v = ds/dt$ , odnosno  $s$  je primitivna funkcija za  $v$ . Medjutim ako je  $C$  proizvoljna konstanta, tada je i  $s + C$  takodje primitivna funkcija za  $v$ . Značenje konstante  $C$  u ovom slučaju odnosi se na početak merenja rastojanja počev od neke pozicije  $C$ , što ne utiče na samu brzinu automobila.

**Primer:** Šta je primitivna funkcija  $F$  za funkciju  $f(x) = 0$ ? Ako je  $F'(x) = f(x) = 0$ , na nekom intervalu, tada funkcija  $F$  mora imati tangentu koja je horizontalna prava u svakoj tački posmatranog intervala. To se može dogoditi jedino ako je funkcija svuda jednaka konstanti. S obzirom na prethodni primer ako posmatramo izvod funkcije kao brzinu, to znači da je brzina uvek jednaka nuli, odnosno objekat se ne kreće pa je njegova pozicija konstantna.

**Primer:** Za funkciju  $F(x) = f'(x)$ , predstavljenu na slici, skicirati grafike funkcija  $f$  sa sledećim uslovima: a)  $f(0) = 0$ ; b)  $f(0) = 1$ ; c)  $f(0) = 2$ .



Funkcija  $F(x) = f'(x)$  i njoj odgovarajuće funkcije  $f(x)$ .

**Definicija.** *Proizvoljna primitivna funkciju date funkcije  $f$  na intervalu  $(a, b)$  zove se neodredjeni integral funkcije  $f$  i obeležava se*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Iz definicije sledi da je neodredjeni integral skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f$  na  $(a, b)$ .

Operacija kojom se određuje integral funkcije, zove se **integracija** i ovo je operacija inverzna diferenciranju.

Ako je  $f$  neka elementarna funkcija tada je dosta verovatno da ćemo biti u stanju da nadjemo njenu primitivnu funkciju  $F$ , koja je takodje elementarna funkcija. Ali ako nismo u stanju da odredimo  $F$ , postavlja se pitanje da li takva funkcija uopšte postoji.

**Napomena:** Proces određivanja primitivne funkcije za neku datu funkciju podseća na nalaženje kvadratnog korena nekog broja. Ako izaberemo neki broj nasumice, kao 7 ili 493, samo uz pomoć kalkulatora možemo reći koliki je kvadratni koren. Ako, međjutim, uzmemo 25 ili 64, tada znamo da se radi o kvadratu broja 5, odnosno 8, pa možemo precizno odgovoriti šta je kvadratno koren. Slično je sa nalaženjem primitivne funkcije.

**Primer:** Naći sledeće neodredjene integrale:

$$\int 5dx, \int 5xdx, \int x^2, \int (t^2 + t)dx, \int \sqrt{x}dx, \int \frac{1}{x}dx, \int \frac{1}{x^2}dx, \int \frac{1}{x^3}dx, \\ \int (2t^2 + 3t^3 + 4t^4)dt, \int \frac{z^2 + 1}{z}dz, \int \left( x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

### Integracija pomoću smene

U nekim slučajevima moguće je pogodnom smenom nezavisno promenljive  $x$ , svesti dati integral na tablični integral.

Neka je dat integral  $\int f(x)dx = F(x)$ ,  $x \in (a, b)$  i neka je  $x = \varphi(t)$  neprekidna i diferencijabilna funkcija po  $t \in (\alpha, \beta)$ . Izvod složene funkcije  $F(\varphi(t))$  je

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Kako je  $F'(x) = f(x)$ , imamo

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \Leftrightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Oдавde sledi

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

gde je  $x = \varphi(t)$  i  $dx = \varphi'(t)dt$ .

**Primer:**  $\int e^{at+b}dt, \int \sin(ax + b)dx, \int x^2 e^{2x^3-1}dx, \int x e^{x^2+1}dx,$

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 5} dx, \int e^{\cos x} \sin x dx, \int \frac{e^t}{1 + e^t} dt.$$

### Parcijalna integracija

Neka su date funkcije  $u = u(x)$  i  $v = v(x)$ , koje su neprekidne i diferencijabilne na  $(a, b)$ . Tada važi

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v.$$

Integracijom ove jednakosti, dobija se

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx \Rightarrow \int uv' dx = uv - \int u'v dx.$$

Kako je  $v' dx = dv$  i  $u' dx = du$ , ovo se može napisati u obliku

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Ovaj postupak zove se parcijalna integracija. Ako postoji integral na levoj strani, tada postoji i integral na desnoj strani i obratno.

**Primer:**  $I = \int x e^x dx$ .

Uzmimo  $u = x$  i  $dv = e^x dx$ . Tada je  $du = dx$  i  $v = \int e^x dx = e^x$ . Na osnovu toga izračunavamo

$$I = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C.$$

Kako izabrati  $u$  i  $v'$ :

- Kada biramo  $v'$ , treba da budemo u mogućnosti da odredimo  $v$ ;
- Bolje je ukoliko je  $u'$  jednostavnije od  $u$ ;
- Bolje je da  $v$  bude jednostavnije od  $v'$ .

**Primer:** 1)  $\int \ln x dx$ , 2)  $\int x^6 \ln x dx$ , 3)  $\int \arctg x dx$ , 4)  $\int x^3 e^{x^2} dx$  (primeniti kombinaciju smene i parcijalne integracije)

## ODREDJENI INTEGRAL

Do pojma izvoda funkcije došli smo izračunavanjem brzine na osnovu predjenog rastojanja. Sada ćemo razmotriti obratan problem: Izračunati predjeni put ako je data brzina. Na ovaj način doći ćemo do koncepta *odredjenog integrala*.

Ako se neki objekat kreće konstantnom brzinom, tada možemo izračunati predjeni put korišćenjem formule:

$$\text{Predjeni put} = \text{Srednja brzina} \times \text{Vreme} = v_{sr} \cdot t.$$

**Problem:** Koliki put predje automobil ako mu brzina nije konstantna već se kreće ubrzano?

Neka je, na primer, u sledećoj tabeli prikazana brzina automobila merena svake 2 sekunde.

vreme(sec)	0	2	4	6	8	10
brzina(m/sec)	10	20	26	30	32	33

Da bismo procenili koliki put je automobil ukupno prešao, izvršićemo sledeće dve aproksimacije:

$$S_{min} \approx 2 \times 10 + 2 \times 20 + 2 \times 26 + 2 \times 30 + 2 \times 32 = 236m \text{ za } 10sec$$

$$S_{max} \approx 2 \times 20 + 2 \times 26 + 2 \times 30 + 2 \times 32 + 2 \times 33 = 282m$$

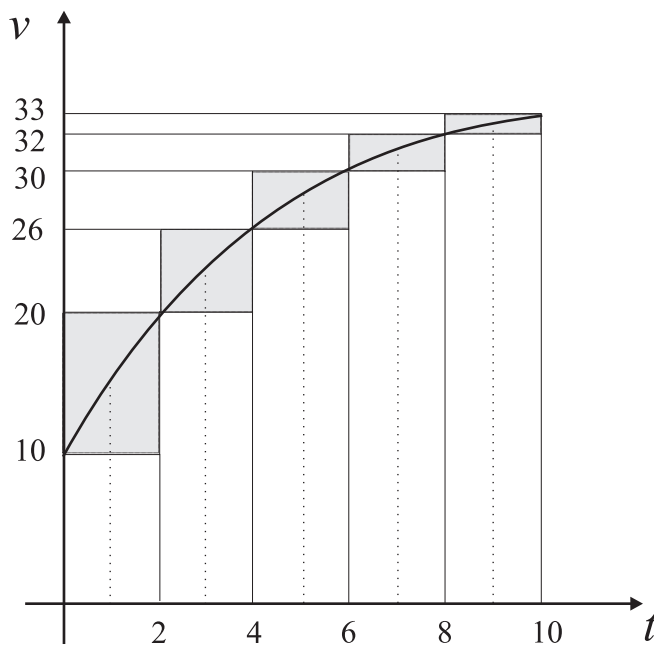
$$\implies 236 \leq S \leq 282$$

Razlika izmedju ovih dveju aproksimacija iznosi  $\leq 282 - 236 = 46$ .

Tačniju vrednost dobili bismo ako merenje brzine vršimo svake sekunde ili ako uzmemo srednje vrednosti brzine na svakom intervalu:

$$S \approx 2 \times 15 + 2 \times 23 + 2 \times 28 + 2 \times 31 + 2 \times 32.5 = 259$$

Vidimo da je sada  $236 < 259 < 282$ , pa je ova aproksimacija svakako tačija od prethodnih. Dobijeni rezultati mogu se predstaviti grafički pomoću sledeće slike.



Za precizno određivanje ukupno predjenog puta u datom vremenskom intervalu moraju se vremenski intervali smanjivati i preći na graničnu vrednost gornje i donje aproksimacije.

Odredićemo put koji je prešao neki objekat krećući se brzinom  $v = f(t)$  u vremenskom intervalu  $a \leq t \leq b$ . Neka je izvršena podela datog intervala na tačke  $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b$ , pri čemu je razlika izmedju dve tačke

$$\Delta t = \frac{b - a}{n}.$$

Ako u svakom vremenskom intervalu predjeni put izračunavamo uzimajući manje vrednosti za brzinu:

$$f(t_0)\Delta t, f(t_1)\Delta t, \dots, f(t_{n-1})\Delta t,$$

dobijamo da ukupno predjeni put iznosi

$$\text{Predjeni put} \approx f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t.$$

Uzimajući gornje granice za aproksimaciju brzine u svakom vremenskom intervalu dobijamo gornju aproksimaciju predjenog puta:

$$\text{Predjeni put} \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \dots + f(t_n)\Delta t.$$

Ako je funkcija  $f$  neprekidna, tada granične vrednosti i gornje i donje aproksimacije postoje i medjusobno su jednake.

### Definicija odredjenog integrala u Rimanovom smislu

Neka je data funkcija  $y = f(x)$  koja je neprekidna na segmentu  $[a, b] \subset R$ . Skup tačaka  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , takvih da važi

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

zove se **podela segmenta**  $[a, b]$ . Ovim tačkama je segment  $[a, b]$  podeljen na  $n$  podintervala

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

sa dužinama  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

$$\begin{array}{c} \left[ \text{-----} \right] \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ a=x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \quad \quad x_{n-1} \quad x_n=b \end{array}$$

**Definicija.** *Zbir*

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k,$$

gde su tačke  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , zove se **integralna suma Rimana funkcije  $f$  za podelu  $\mathcal{P}$** .

**Definicija.** Neka je  $f : [a, b] \mapsto R$  ograničena funkcija. Ako za svaku podelu  $\mathcal{P}$  intervala  $[a, b]$  i za bilo koji izbor tačaka  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  ( $k = 1, \dots, n$ ) postoji uvek ista granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k,$$

tada za funkciju  $f$  kažemo da je **integrabilna u Rimanovom smislu na segmentu  $[a, b]$**  a broj  $I$  zove se **odredjeni integral funkcije  $f$  na  $[a, b]$** .

Pišemo

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

$a$  – donja granica  
 $b$  – gornja granica  
 $f$  – podintegralna funkcija (integrand)

## Osnovna teorema određenog integrala

Videli smo iz prethodnog izlaganja da se određeni integral funkcije brzine može interpretirati kao ukupno predjeni put. Ako je  $v(t)$  brzina a  $s(t)$  put u jedinici vremena, tada je veza između ovih funkcija:  $v(t) = s'(t)$ . Takođe, znamo da važi

$$\text{Ukupno predjeni put} = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt.$$

Ovaj rezultat može se uopštiti. Neka je  $F'(t)$  prvi izvod, ili brzina promene neke veličine  $F(t)$  u odnosu na vreme, pri čemu smo zainteresovani za ukupnu promenu funkcije na intervalu  $[a, b]$ . Podelimo dati interval na  $n$  podintervala jednake dužine  $\Delta t$ . Na svakom podintervalu promena funkcije  $F$ , odnosno njen priraštaj, aproksimativno iznosi

$$\Delta F \approx F'(t) \Delta t.$$

Tako je na prvom podintervalu  $\Delta F \approx F'(t_0) \Delta t$ , na drugom je  $\Delta F \approx F'(t_1) \Delta t$ , i tako dalje. Sabiranjem po svim podintervalima dobija se

$$F(b) - F(a) (= \text{Promena } F \text{ od } a \text{ do } b) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F \approx \sum_{k=0}^{n-1} F'(t_k) \Delta t.$$

Uzimajući da  $n$  teži ka beskonačnosti, u graničnom procesu se dobija

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F \approx \sum_{k=0}^{n-1} F'(t_k) \Delta t = \int_a^b F'(t) dt.$$

Na osnovu ovoga formuliše se osnovna teorema za određene integrale, poznata pod nazivom Njutn-Lajbnicova formula:

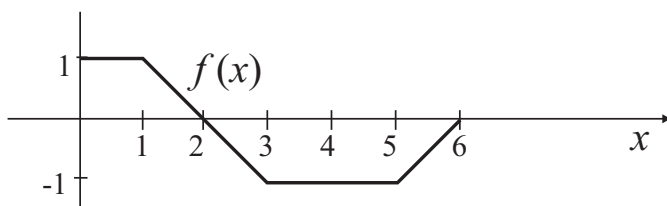
**Teorema.** *Ako je  $f$  neprekidna funkcija na intervalu  $[a, b]$  i  $f(t) = F'(t)$ , tada je*

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

Ova formula zove se **Njutn-Lajbnicova formula**.

Ova teorema predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata kalkulusa jer daje vezu između izvoda i određenog integrala.

**Primer:** Na slici je prikazan grafik funkcije  $y = f(x)$ . Ako je  $F'(x) = f(x)$  i  $F(0) = 0$ , naći  $F(b)$  za  $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .



**Primer:** Korišćenjem Njutn-Lajbnicove formule izračunati  $\int_1^3 2x dx$ .

Kako je  $f(x) = 2x$  izvod funkcije  $F(x) = x^2$ , imamo

$$\int_1^3 2x dx = F(3) - F(1) = 3^2 - 1^2 = 8.$$

**Primer:** Izračunati sledeće određene integrale:

$$\int_2^5 (x^3 - \pi x^2) dx, \int_1^2 \frac{1+y^2}{y} dy, \int_0^{\pi/4} (\sin t + \cos t) dt, \int_{-3}^{-1} \frac{2}{r^3} dr, \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

$$\int_0^2 \left( \frac{x^3}{3} + 2x \right) dx.$$

## Osnovne osobine određenog integrala

Osnovne osobine proističu iz definicije određenog integrala i mogu se dokazati. Neka su  $f$  i  $g$  integrabilne funkcije na  $[a, b]$ .

1) Ako je  $f(x) = 1, \forall x \in [a, b]$  tada je  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$ .

2)  $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, c = \text{const.}$  (**homogenost**)

3)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  (**aditivnost**)

4) Ako je  $f$  integrabilna na  $[a, b]$  i  $c \in (a, b)$ , tada

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(Aditivnost određenog integrala u odnosu na interval integracije.)

5) Ako je  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  tada je

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

6) Ako je  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ , tada je  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

$$7) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

8) Ako su  $f$  i  $g$  integrabilne na  $[a, b]$ , tada je i  $f \cdot g$  integrabilna na  $[a, b]$ .

9) Neka je  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  i  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , tada je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

### Teorema o srednjoj vrednosti

**Teorema.** Neka je  $f$  neprekidna na  $[a, b]$ . Tada postoji  $c \in [a, b]$  tako da važi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Dokaz.** Kako je  $f$  neprekidna na ograničenom intervalu, ona je i ograničena pa sledi da postoje brojevi  $m, M \in \mathbb{R}$ :

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

Na osnovu osobine 6) odavde sledi:

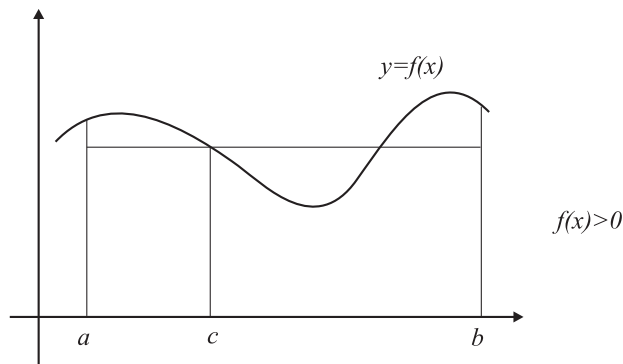
$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \\ m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M. \end{aligned}$$

Kako je  $f$  neprekidna, ona uzima sve vrednosti iz intervala  $[m, M]$ . Odatle sledi da postoji tačka  $c \in [a, b]$  takva da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} I.$$

### Geometrijska interpretacija:

Neka je  $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ .  $f(c)$  predstavlja srednju vrednost funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .



**Primer:** Objasniti zašto je  $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx \leq \sqrt{\pi}$ .

*Rešenje:* Kako je  $\sin(x^2) \leq 1$  za svako  $x$ , na osnovu osobine 6) sledi da je

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx \leq \int_0^{\sqrt{\pi}} 1 dx = \sqrt{\pi}.$$

**Primer:** Pokazati da važi  $2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 6$ .

*Rešenje:* Funkcija  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$  je na intervalu  $[0, 2]$  rastuća (jer je  $x^3$  rastuća). Stoga važi da je  $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$ . Kako je  $f(0) = 1$  i  $f(2) = 3$ , na osnovu osobine 9) dobijamo

$$1(2-0) \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3(2-0).$$

**Primer:** Prosečna vrednost funkcije  $y = f(x)$  iznosi 4 za  $x \in [1, 6]$  i 5 za  $x \in [6, 8]$ . Koja je srednja vrednost funkcije za  $x \in [1, 8]$ .

**Primer:** Naći srednju vrednost funkcije na datom intervalu:

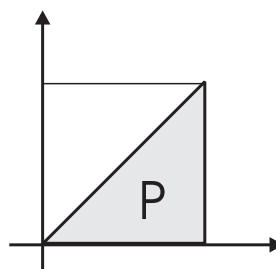
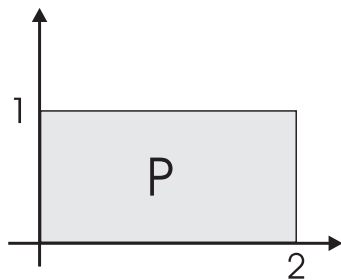
a)  $f(x) = 1 + x$ ,  $x \in [0, 2]$ , b)  $g(t) = 4t + 7$ ,  $t \in [1, 3]$ , c)  $h(x) = e^x$ ,  $x \in [0, 10]$ .

### Odredjeni integral kao površina

Primene odredjenog integrala zasnivaju se na definiciji. Odredjeni integral koristi se za izračunavanje površina figura u ravni, dužinu lukova ravnih krivih, zapremine i površine tela.

**Primer:**  $\int_0^2 1 dx = x \Big|_0^2 = 2$

$\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$



I) Neka je  $y = f(x)$  pozitivna funkcija na  $[a, b]$ . Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = P(G),$$

gde je  $G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ .

II) Ukoliko je  $f(x) < 0, \forall x \in [a, b]$ , tada je

$$P(G) = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

III) Ako je  $f(x) > 0$  za  $x \in (c, d)$  i  $f(x) < 0$  za  $x \in [a, c) \cup (d, b]$ , tada je

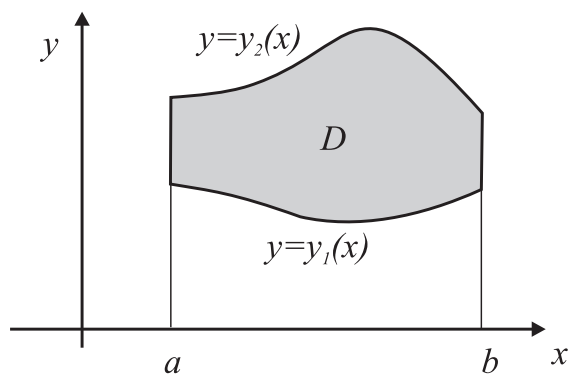
$$P(G) = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx.$$

IV) U slučaju kada je oblast u ravni omeđena dvema krivama, tj.

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

Površina ove oblasti se izračunava kao

$$P(D) = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$$



**Primer:** Izračunati površinu ograničenu lukom krive  $y = 4 - x^2$  i  $x$ -osom.

**Primer:** Izračunati površinu koju obrazuje grafik krive  $y = x^2 - 8x + 7$  sa  $x$ -osom.

**Primer:** Naći površinu jednog luka krive  $y = \sin x$ . Kolika je vrednost  $\int_{-2}^2 \sin x dx$ ?

**Primer:** Naći površinu ograničenu pravom  $y = 1$  i jednim lukom krive  $y = \sin x$ .

**Primer:** Izračunati površinu između grafika funkcija  $y = \sin \phi$  i  $y = \cos \phi$  za  $0 \leq \phi \leq \pi/4$ .

**Primer:** Naći pozitivnu vrednost  $c$  takvu da je površina između grafika krive  $y = x^2 - c^2$  i  $x$ -ose jednaka 36.

**Primer:** Izračunati površinu oblasti ograničene krivama  $y = 1/(1+x^2)$  i  $y = x^2/2$ .

**Primer:** Naći površinu oblasti ograničene krivama  $y = x^2$ ,  $y = 6 - x$  i  $y$ -osom.