MATEMATIČKA LOGIKA BEZ TABLICA ISTINITOSTI SA UVODOM U BULOVU ALGEBRU

dr Rade Doroslovački i dr Radivoje Stojković

Beograd 17.01.2010.

Sažetak

U ovom radu posebno se ističe da je važno tautologije dokazivati (i) bez tablica istinitosti, odnosno prepoznavati da su to zakoni koji **postoje u ljudskoj svesti**.

Drugim rečima pravi se jedan konceptualno **ne**matematički prikaz, odnosno na **ne**matematički način se dolazi do formalizacije logike.

Korektno matematičko rasuđivanje ne mora se učiti proučavanjem logičkih formula i simbola, već izvanrednim primerima iz „običnog" života, pomoću govornog jezika, koji su dobrog logičkog i metodološkog sadržaja.

Naprimer logičku operaciju konjunkciju $p \wedge q$ treba čitati: „Oba su tačna" dok logičku operaciju disjunkciju $p \vee q$ treba čitati: „Bar jedan je tačan" , logičku operaciju negaciju $\neg p$ treba čitati: „nije tačan p" i logičku operaciju ekvivalenciju $p \Leftrightarrow q$ treba čitati „isto je što i " pa onda Demorganov zakon $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ se čita:

„Nisu oba tačna isto je što i bar jedan je netačan"

ili

„Nisu (i) Pera i Steva Englezi isto je što i bar jedan od njih nije Englez"

gde je p isto što i „Pera je Englez" a q je isto što i „Steva je Englez"

što za svako ljudsko biće je očevidno tačno! Ovo se potkrepljuje i kroz razne konkretne primere da bi se potvrdilo gore rečeno.

Posebno mesto u ovom izlaganju posvećeno je **implikaciji**, jer je ona nesporno najapstraktnija logička operacija i za nju se takođe kroz razne primere običnog života pokazuje da postoji u svesti (mozgu?) ljudskih bića tj. da nju nisu definisali matematičari, već samo **prepoznali** u svojoj svesti.

Da bi logika nastala i razvijala se, mora da postoji prirodna sredina (medium) u kome se to dešava. Da bi riba nastala i razvijala se mora da postoji prirodna sredina (medium) za to, a znamo da su to reke, jezera, mora i okeani.

Osnovni medijum logike jeste maternji jezik. U ovom radu se pokazuje da svako ljudsko biće koje je savladalo svoj maternji jezik i nije završilo nijedan razred škole, može u svojoj svesti da prepozna sve logičke operacije i sve logičke zakone. Tek posle jezika pojavlju se drugi medijumi (nauke?) za logiku, a to su matematika, fizika, hemija, biologija, medicina, ekonomija, sociologija, psihologija, geografija, istorija, filosofija, teologija itd.

Kako je matematika zaista jedan od najlepših midiuma za logiku, tu su matematičari prisvojili logiku kao svoju i nazvali je „Matematička logika"

Dalje se ukazije da su kvantifikatori $\forall$ i $\exists$ uopštenja konjunkcije i disjunkcije, a formule $\neg(\forall x)\pi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg\pi(x)$ i $\neg(\exists x)\pi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg\pi(x)$ su uopštenja Demorganovih zakona.

Može se pokazati da je najelegantniji i najkraći dolazak do svih tautologija formiranjem Bulove algebre, a time su automatski proučeni osnovni delovi teorije skupova i teorije brojeva.

Uvod

Ovaj rad jeste jedan pokušaj priče o tome šta je to logika?

Kako se broj novih naučnih saznanja povećava velikom brzinom, tada, da bi mladi istraživač došao što pre do nivoa da može ravnopravno učestvovati u naučnoj „trci" on mora prethodno da savlada sva neophodna fundamentalna znanja čiji broj kako rekosmo raste ekponencijalnom brzinom. Zbog toga je razvoj metodike nastave matematike izuzetno važan, da bi mladi istraživač što pre stasao za ozbiljan naučni rad.

Metodika nastave matematike je nauka koja proučava metode, načine, postupke i algoritme, kako najlakše, najbrže i najefikasnije naučiti nekoga đaka, studenta ili bilo koga drugog ko želi da usvoji neka znanja iz matematike. Naravno da je metodika nastave matematike interdisciplinarna nauka matematike, pedagogije i psihologije.

Posebno, metodika nastave matmatičke logike je interdisciplinarna nauka pored matematike, pedagogije i psihologije, još i logike i filozofije.

Da li je naziv „Matematička logika" odgovarajući i opravdan? Kako ćemo videti iz ovoga rada, „Matematička logika" je logika svih ovozemaljskih ljudskih bića, a ne samo posebne grupacije ljudi, matematičara. Možda bi se moglo reći da je to Božija logika, bez obzira da li prihvatamo postojanje Boga ili ne.

Iskazi

Vi znate da su izkazi rečenice na koje se može primeniti jedna i samo jedna od reči istinito ili neistinito tako da „to ima smisla"

Drugim rečima, funkcija koja preslikava skup rečenica u skup $\{$ tačno, netačno $\}$, za svoj domen ima samo rečenice koje su ISKAZI

Sad na početku rasprave o „logici" teško je dati neku precizniju „definiciju" odnosno objašnjenje, šta je to iskaz (stav, sud, tvrđenje, teorema (?), lema (?)). Pojam iskaza ustvari sazreva kroz dugi niz godina rada u matematici i u drugim naukama.

Dalje će već biti lakše, kada se počnu definisati (?) osnovne logičke operacije u skupu svih iskaza, a to su konjunkcija, disjunkcija, ekvivalencija, implikacija i negacija.

Prve dve, možemo reći najosnovnuje i najjednostavnije, su konjunkcija i disjunkcija opisane (definisane ?) u sledećem delu.

Konjunkcija, disjunkcija, negacija i Demorganovi zakoni

Binarna operacija konjunkcija, u oznaci $\wedge$ među iskazima p i q je takva da je iskaz $p \wedge q$ istinit ako i samo ako su oba istinita, a operacija disjunkcija u oznaci $\vee$ je takva da je $p \vee q$ istinit ako i samo ako je bar jedan istinit.

Negacija, u oznaci $\neg$ je unarna operacija takva da ako je p istinit tada je $\neg p$ neistinit i ako je p neistinit, tada je $\neg p$ istinit.

Činjenice iz prethodna dva pasusa ne mogu se dokazati, one su plod logike ljudskoga roda (definicije?), ali se sada na primer može „dokazati" da iskaz $\neg(p \wedge q)$ ima uvek istu istinitosnu vrednost sa iskazom $\neg p \vee \neg q$, za sve vrednosti iskaza p i q tj. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Dokaz sledi efektivnom proverom sva četiri moguća slučaja.

Međutim i bez te provere, nama, pripadnicima ljudskoga roda, to je jasno i bez dokazivanja (?), jer ako konjunkciju čitamo oba su tačna i disjunkciju bar jedan je tačan sledi tačnost iskaza:

Nisu oba tačna, isto je što i bar jedan je netačan!
a to je baš prvi Demorganov zakon.

Analogno je i sa drugim Demorganovim zakonom $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$, koji iskazan običnim rečima glasi:

Nije bar jedan tačan, isto je što i oba su netačna!
ili
Nije tačno, da je bar jedno od njih dvoje lopov, isto je što i oboje su pošteni.
a to je baš drugi Demorganov zakon.

Time prepoznajemo, da ovi logički zakoni, koji se zovu se Demorganovi zakoni (tautologije) postoje u svesti svakoga čoveka i nema potrebe (?) za nekim „dokazivanjem" !

Logička operacija ekvivalencija je označena sa $\Leftrightarrow$ i iskaz $p \Leftrightarrow q$ je tačan ako i samo ako iskazi p i q su takvi da istovremeno su oba tačna ili oba netačna. I ova logička operacija je vrlo jednostavna i jasno prepoznatljiva u našoj svesti.

Sad umesto $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ pisaćemo $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

Kao i umesto $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ pisaćemo $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Ilustracija prvog Demorganovog zakona na primeru:

„Nije tačno da su **i** Stiven **i** Majkl belci, isto je što i (ekvivalentno sa) bar jedan od njih nije belac"

tj.

„Nisu oba belci, istoje što i (ekvivalentno sa) bar jedan od njih nije belac"

i drugog:

„Nije tačno da je bar neko od njih dvoje lopov, isto je što i (ekvivalentno sa) oboje su pošteni"

Na taj način dalje izgrađujemo našu sopstvenu logiku tj. formalizujemo je odnosno uređujemo je tj. prepoznajemo da ona postoji u našoj svesti, u svesti ovozemaljskih ljudskih bića!

Generalizacije konjunkcije i disjunkcije tj. kvantifikatori i generalizacije Demorganovih zakona

Ako je $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ neki skup bilo kakvih elemenata i ako je π neka osobina koju svaki elemenat skupa A može posedvati ili ne, tada oznaka $\pi(x)$ se čita π od x odnosno

$$\pi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{„elemenat } x \text{ poseduje osobinu } \pi\text{"}$$

i naravno $\pi(x)$ jeste iskaz.

Dalje uvodimo oznake

$$(\exists x \in A)\pi(x)$$

(čita se: Postoji x iz skup A takav da je $\pi(x)$ tačno) i

$$(\forall x \in A)\pi(x)$$

(čita se: Za svako x iz skup A $\pi(x)$ je tačno), koje su definisane sa:

$$(\exists x \in A)\pi(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \pi(x_1) \vee \pi(x_2) \vee \cdots \vee \pi(x_n)$$

$$(\forall x \in A)\pi(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \pi(x_1) \wedge \pi(x_2) \wedge \cdots \wedge \pi(x_n),$$

gde je π neka osobina koju proizvoljni elemenat može zadovoljavati ili ne zadovoljavati tj. $\pi(x)$ je iskaz, što znači ili je tačan ili netačan.

Prema toma simboli $\forall$ i $\exists$ su uopštenja konjunkcije odnosno disjunkcije i zovu se kvantifikatori redom „za svako" i „postoji"

Rekli smo da π označava neku osobinu koju svaki elemenat skupa $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ može posedovati ili neposedovati i da $\pi(x)$ označava da elemenat x iz skupa A poseduje osobinu π. Naravno, jasno je da $\pi(x)$ jeste iskaz.

Kao što smo rekli, vrlo važne teoreme iz iskazne algebre tj. tautologije, koje se veoma često koriste u radu, su Demorganovi zakoni,

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, a njihove generalizacije za $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, gde su $\pi(x_1), \pi(x_2), \cdots, \pi(x_n)$ neki iskazi, su

$$\neg\Big((\exists x \in A)\pi(x)\Big) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg\pi(x)$$

$$\neg\Big((\forall x \in A)\pi(x)\Big) \Leftrightarrow (\exists x \in A)\neg\pi(x)$$

ili na primerima:

„Nije tačno da postoji jednakostraničan trougao"

ekvivalentna je sa

„Svaki trougao je nejednakostraničan"

gde je A skup trouglova, a osobina π - biti jednakostraničan. Takođe rečenica

„Nije tačno da su svi ljudi humani"

ekvivalentna je rečenici

„Postoji čovek koji nije human"

gde je A skup ljudi, a osobina π - biti human.

Nije tačno, da je bar jedan okrivljen, isto je što i svi su nevini.

Ove formule u Matematičkoj logici zovu se valjane formule.

IMPLIKACIJA

Posebno mesto u analiziranju i proučavanju logičih operacija posvetićemo IMPLIKACIJI, ne samo zbog njene važnosti, već i zbog njene velike apstraktnosti u poređenju sa ostalim logičkim operacijama.

Bez sumnje, u metodičkoj pedagoškoj obrazovnoj praksi, pokazano je da učenici i studenti najteže usvajaju pojam implikacije. Ovaj rad pokušava da objasni razlog te nesporne činjenice i pokušava da doprinese što efikasnijem savladavanju pojma implikacije tj. uveravanjem da ona postoji u našoj svesti.

Pokušajmo da ovu izuzetno važnu logičku binarna operacija u algebri iskaza IMPLIKACIJU, koju čitamo: „ako je p, tada je i q” , prepoznamo u našoj svesti, koja se inače označava sa $p \Rightarrow q$.

Pre toga navedimo prvo nekoliko načina čitanja implikacije. Znači $p \Rightarrow q$ se čita:
„p implicira q” ili „iz p sledi q” ili „q je posledica od p” ili „p je dovoljan uslov za q” ili „q je potreban uslov za p” ili „ako je p, onda je q”

Da vidimo šta logika ljudskoga roda (tj. mi) kaže (kažemo), kada je iskaz $p \Rightarrow q$ tačan, a kada netačan?

Pa kao što osećate i znate implikacija kaže da ako je p tačan, onda mora biti i q tačan, ***a ako p nije tačan, onda nikom ništa tj. sve je uredu!***

Prema tome implikacija je netačna ako i samo ako je p tačan i q netačan i NIKAD VIŠE!

Drugim rečima ako je iskaz p netačan, tada je p ⇒ q tačan iskaz bez obzira da li je iskaz q tačan ili netačan!

Znači rečenica „Akoje p onda je i q” zahteva da je q tačno SAMO ako je p tačno, odnosno ako je p netačno tada se ništa ne zahteva tj. sve je uredu!

Takođe važi da ako je q tačan, tada je $p \Rightarrow q$ tačan bez obzira na tačnost iskaza p.

To znači da kada ispitujemo tačnost implikacije $p \Rightarrow q$, tada je dovoljno proveravati samo da li je moguć slučaj $p = \top$ i $q = \bot$, pa ako je taj slučaj NEPOSTOJEĆI, onda i samo onda je implikacija tačna!

„Tačnost” (?) činjenica u prethodnim pasusima „dokazivaćemo” (?) kroz konkretne primere koji slede.

Sledeći primer rešavamo tako što ćemo zaboraviti da smo matematičari i zaboraviti da znamo definiciju implikacuje tj. kada je ona tačna, a kada je netačna. Tek posle toga rešićemo isti primer ali tako što ćemo koristiti definiciju implikacije.

Uporediti rezultate. Da li smo dobili iste odgovore? Evo toga primera!

Pera je saopštio Stevi tačan iskaz koji glasi:
„Ako mi budeš smetao, dobićes batina”

Steva je smetao Peri. Da li je Steva dobio batina? ______________
Steva je dobio batina. Da li je Steva smetao Peri? ______________
Steva nije dobio batina. Da li je Steva smetao Peri? ______________
Steva nije smetao Peri. Da li je Steva dobio batina? ______________

Mogući odgovori su samo jedan od: DA, NE i NE ZNA SE.

Naravno da smo dobili iste odgovore i to potvrđuje da implikacija postoji u našoj svesti baš onakva kako se to u matematičkoj logici i definiše!

Logička operacija ekvivalencija je označena sa $\Leftrightarrow$ i iskaz $p \Leftrightarrow q$ je tačan ako i samo ako iskazi p i q su takvi da istovremeno su oba tačna ili oba netačna.

Sada se može dokazati (proverom sva 4 moguća slučaja) još jedan vrlo važan i često korišćen logički zakon koji se zove kontrapozicija tj.

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p,$$

jer u nekim primerima mnogo lakše dokazujemo $\neg q \Rightarrow \neg p$ nego $p \Rightarrow q$.

„Dokažimo” ovaj zakon kontrapozicije sledećim primerom:

Ako bude pomračenja sunca, tada indijanci neće ratovati

isto je što i

Ako su indijanci ratovali, tada nije bilo pomračenja sunca.

Primetimo da ovaj zakon kontrapozicije, ustvari je onaj metod dokazivanja kontradikcijom!

Objasnimo to!

Metod dokazivanja kontradikcijom kaže:

„Da bi smo dokazali da iz tačnosti iskaza p sledi tačnost iskaza q, pretpostavićemo da iskaz q nije tačan. Ako nas ta pretpostavka dovede do bar jednog netačnog iskaza (naprimer $\neg p$), to će značiti da je naša pretpostavka $\neg q$ netačna tj. iskaz q je tačan"

Ovaj metod se samo „servira" učenicima i studenima kao „zdravo za gotovo" i njima to postaje jasno kroz razne primere, pa niko više ne pravi nikakve probleme oko toga da li je to baš tako!

Prema tome da li je trebalo ovaj zakon kontrapozicije dokazivati kroz 4 slučaja pomoću tablice istinitosti ili je prethodni primer sa indijancima dokaz?

Na osnovu prethodnih pasusa i definicije (?) implikacije, sledi da je* jedini *slučaj kada prva implikacija netačna, $p = \top$ i $q = \bot$, a isto važi i za drugu implikaciju!

To znači da je iskaz $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ uvek tačan tj. tautologija. Znači da je ovim dat dokaz bez korišćenja tablice istinitosti tj. bez proveravanja sva četiri slučaja!

Međutim, koliko god je uloženo truda u prethodnim pasusima da se objasni implikacija tj. truda da se prepozna njeno postojanje u našoj svesti, to nije tako jednostavno i neophodno je puno godina rada u matematici sa raznim reprezentativnim primerima da bi se postigao zadovoljavajući uspeh.

Šta to znači reprezentativan primer za neku definiciju, teoremu ili osobinu π? To je takv primer, koji u odnosu na ostale primere, neuporedivo bolje, brže, jasnije, jednostavnije i efikasnije objašnjava neku definiciju, teoremu ili osobinu π.

Drugim rečima to su krajnje jednostavni primeri koji u potpunosti objašnjavaju tj. karakterišu neku osobinu, definiciju ili teoremu.

Umeće metodike matematike je u pronalaženju reprezentativnih primera i kontra primera!

U tu sfrhu proanalizirajmo neke primere definicija u kojima ključnu ulogu ima implikacija, kako bi polako postajali sve familijarniji sa implikacijom. Pođimo sa definicijom antisimetričnosti binarne relacije.

Kao što znate binarna relacija ρ skupa A je bilo koji skup uređenih parova čije komponente su iz skupa A, a ona **nije** antisimetrična relacija skupa A ako i samo ako se istovremeno pojave parovi $(1,2)$ i $(2,1)$ tj. bar jedan par simetričnih parova čije komponente su različite.

Drugim rečima relacija ρ je antisimetrična relacija ako i samo ako **nepostoji** par simetričnih parova čije komponente su različite, koji oba pripadaju relaciji ρ.

Time je potpuno jasno definisano šta je antisimetrična relacija, bez upotreba logičkih operacija!

Kako za svaku relaciju važi da ili je antisimetrična ili nije, tj. nema trećega, to je svejedno da li ćemo definisati kada nije ili kada jeste antisimetrična!

„Matematička" definicija antisimetričnosti glasi:
Relacija ρ je antisimetrična ako i samo ako za SVE njene parove važi

$$\Big((x,y) \in \rho \land (y,x) \in \rho\Big) \Rightarrow x = y$$

Da li ova matematička definicija govori isto što i prethodna? Ako je odgovor DA, onda smo mi objasnili da tačnost implikacije zaista postoji u svesti ljudskih bića!

Kako smo konstatovali, da jedini slučaj netačnosti implikacije jeste, kada je leva strana tačna, a desna netačna, to sledi da relacija nije antisimetrična ako i samo ako se istovremeno pojave parovi $(1,2)$ i $(2,1)$ tj. par simetričnih parova čije komponente su različite. Drugim rečima to je ekvivalentno sa

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \land x \neq y\Big) \Rightarrow (y,x) \notin \rho.$$

Iz ekvivalentnosti prethodne dve implikacije sledi da važi logički zakon tj. tautologija:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$$

gde smo uzeli $p : (x, y) \in \rho, \;\; q : (y, x) \in \rho \;$ i $\; r : x = y$.

Da li se sa ovim može smatrati da je teorema (lema, tautologija, formula) $\;(p \wedge q) \Rightarrow r \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q\;$ dokazana?

Ilustrujmo implikaciju još na primeru definicije tranzitivnosti binarne relacije. Kroz dugogodišnju metodičku praksu pokazalo se da učenje i shvatanje pojma tranzitivnosti na početku njenoga proučavanja uopšte nije jednostavano, pogotovu ako profesor, koji tumači tu lekciju, nije metodički virtouz! Zašto? Pa baš zbog toga što je tranzitivnost takođe definisana pomoću implikacije, koja je kao što rekosmo najsuptilnija (najapstraktnija) u odnosu na ostale logičke operacije.

Sada ćemo dati definiciju tranzitivnosti običnim maternjim jezikom, što može da razume svako, čak i bez i jednog razreda škole samo da ima predstavu šta je to uređen par (a, b) tj. da su to dvojica a i b gde je bitno da je a prvi, a b drugi, što označavamo sa (a, b) i da ima predstavu skupa.

Neki skup uređenih parova, odnosno binarna relacija ρ, čije su komponente iz skupa A, **nije** tranzitivna ako i samo ako se **bar** jednom desi situacija da

$$(4, 5) \in \rho \;\text{ i }\; (5, 7) \in \rho \;\text{ i }\; (4, 7) \notin \rho.$$

Naravno, ovde podrazumevamo da isto važi, ako su umesto 4, 5 i 7 bilo koji drugi elementi iz skupa A.

Ako se takva situacija nikada ne desi relacija ρ jeste tranzitivna.

Zašto je u prethodna dva primera lakše bilo definisati $\neg\pi$ umesto π? Jasno je da je to zbog toga što su obe dedfinisane preko implikacije, a ona je samo u jednom slučaju netačna, dok je u preostala tri slučaja tačna.

Evo sada „Matematičke” definicije tranzitivne relacije ρ.

Relacija ρ skupa A, je tranzitivna ako i samo ako za SVE uređene parove iz ρ važi:

$$\Big((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho\Big) \Rightarrow (x, z) \in \rho$$

što je ekvivalentno sa (prethodna tautologija)

$$\Big((x,y) \in \rho \wedge (x,z) \notin \rho\Big) \Rightarrow (y,z) \notin \rho.$$

Najčešća greška, đaka i studenata, koji prvi put uče definiciju tranzitivnosti, (jer im nije data ona prva definicija običnim rečima) jeste da za na primer relaciju $\rho = \{(1,2),(1,3)\}$ kažu nije tranzitivna, sa obrazloženjem da u skupu (relaciji) ρ ne postoje parovi (x,y) i (y,z). Tačno je da takvi parovi u relaciji ρ ne postoje, ali to je LEVA strana naše implikacije, koja je znači netačna pa je implikacija baš zbog toga tačna, jer ako je p tačan, SAMO onda mora biti i q tačan, ***pa ako p nije tačan, onda nikom ništa tj. sve je uredu, odnosno*** $p \Rightarrow q$ ***je tačno!***

Znači relacija $\rho = \{(1,2),(1,3)\}$ jeste tranzitivna jer leva strana implikacije $\Big((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho\Big) \Rightarrow (x,z) \in \rho$ je uvek (tj. za sve vrenosti x i y) netačna, pa je implikacija (uvek) tačna.

Međutim, da smo studentima ili đacima prvo dali onu gornju uokvirenu definiciju, svima bi onda odmah bilo jasno i niko ne bi pitao zašto relacija $\rho = \{(1,2),(1,3)\}$ jeste tranzitivna.

I ovaj primer je dokaz da tačnost implikacije postoji u našoj svesti.

Kako „osetiti" da je implikacija tačna kada je njena leva strana netačna? Najbolje (možda i jedino?) je kroz reprezentativne primere kao što su prethodni. Mi treba prvo na PRIMERU da objasnimo običnim rečima šta je tranzitivnost, a tek onda da konstatujemo da ona „prava" definicija govori baš to isto, odnosno tek tako ćemo polako shvatati zašto je implikacija tačna, kada je njena leva starna netačna, odnosno da ona postoji u svesti svakog ljudskoga bića!

Iz ovih primera se vidi da dokaz netranzitivnosi je mnogo kraći nego dokaz tranzitivnosti, jer kada relacija nije tranzitivna samo navedemo slučaj kada je leva strana tačna, a desna netačna, dok ako je relacija tranzitivna treba ispitati sve moguće slučajeve i konstatovati da se u svima njima nikada nije desilo da je leva strana tačna, a desna netačna.

Nažalost, kao što smo rekli, proces potpunoga shvatanja pojma imlikacije tj. razumevanja da ona baš kao takva postoji u našoj svesti, je dugotrajan i moguć samo kroz što više primera iz raznih oblasti matematike (i drugih oblasti).

Proanalizirajmo sada implikaciju na primeru definicije funkcije.

Funkcija je skup uređenih parova u kojem nepostoje dva para čije prve komponente su jednake a druge različite.

Naprimer ako skup uređenih parova f sadrži parove (x, y) i (x, z), gde su x, y, z različiti, tada f nije funkcija.

Definicija funkcije data je i sa sledećom slikom.

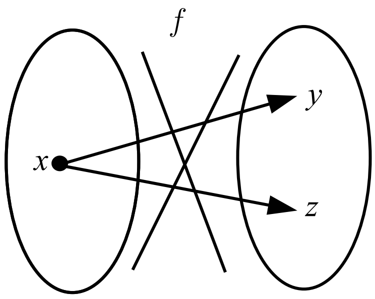


Figure 1:

Sa ove slike čitamo: „Nesme da se desi da oba para (x, y) i (x, z) pripadaju skupu parova f, da bi skup parova f bio funkcija"

Na primer $f_1 = \{(1, x), (2, y)\}$ i $f_2 = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ jesu funkcije, dok $f_3 = \{\boxed{(1,x),(1,y)}\}$, $f_4 = \{\boxed{(1,x),(1,y)}, (2, z)\}$ nisu funkcije, jer **postoje** dva para $(1, x)$ i $(1, y)$ kod kojih su prve komponente jednake, a druge komponente različite (Uokvireni parovi).

Sada kada smo potpuno razumeli šta je funkcija, daćemo pravu „matematičku" definiciju funkcije, koja glasi:

Skup uređenih parova f je funkcija ako i samo ako za svaka dva para (x, y) i (x, z) iz f važi

$$\big((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f\big) \Rightarrow y = z$$

Da li je ovo ekvivalentno sa prethodnom slikom?

Jeste, jer slika govori ne sme da se desi da su y i z različiti, a implikacija govori y i z moraju da su jednaki, što je naravno isto!

Evo još jedne ekvivalentne definicije funkcije.

Skup uređenih parova f je funkcija ako i samo ako za svaka dva para (x, y) i (x, z) iz f važi

$$y \neq z \Rightarrow \big((x, y) \notin f \vee (x, z) \notin f\big)$$

Ovo jeste ekvivalentna definicija funkcije, jer govori isto što i slika 1, a to je: „Ako su y i z različiti, tada nesme da se desi da postoje obe strelice na slici tj. $(x, y) \notin f$ ili $(x, z) \notin f$"

Iz ekvivalentnost poslednje dve implikacije sledi tautologija (zakon)

$$\big((p \wedge q) \Rightarrow r\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\neg r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)\big)$$

Sa druge strane ova tautologija jeste „posledica" dva logička zakona, Demorganovog zakona i zakona kontrapozicije, koje smo gore pokazali.

Kao što vidimo, čak i ovako komplikovani logički zakoni komponovani od više logičkih zakona mogu se „prepoznati u našoj svesti" preko jednostavnih primera, kao što je i definicija funkcije.

Evo jedan lep primer za proveru razumevanja implikacije.

Sin Steva uvek izvršava naredbe svoga oca.
Otac je naredio sinu Stevi: „Ako pada kiša , ti si u kući”

	Odgovori:
1. Kiša pada. Da li je Steva u kući?	__________
2. Kiša ne pada. Da li je Steva u kući?	__________
3. Steva je u kući. Da li pada kiša?	__________
4. Steva nije u kući. Da li pada kiša?	__________

Sin Steva uvek izvršava naredbe svoga oca.
Otac je naredio sinu Stevi: „Ako pada kiša , ti nisi u kući”

	Odgovori:
1. Kiša pada. Da li je Steva u kući?	__________
2. Steva je u kući. Da li pada kiša?	__________
3. Steva nije u kući. Da li pada kiša?	__________
4. Kiša ne pada. Da li je Steva u kući?	__________

Sin Steva uvek izvršava naredbe svoga oca.
Otac je naredio sinu Stevi: „Ako ne pada kiša , ti si u kući”

	Odgovori:
1. Kiša pada. Da li je Steva u kući?	__________
2. Kiša ne pada. Da li je Steva u kući?	__________
3. Steva je u kući. Da li pada kiša?	__________
4. Steva nije u kući. Da li pada kiša?	__________

Sin Steva uvek izvršava naredbe svoga oca.
Otac je naredio sinu Stevi: „Ako ne pada kiša , ti nisi u kući”

	Odgovori:
1. Steva je u kući. Da li pada kiša?	__________
2. Kiša pada. Da li je Steva u kući?	__________
3. Kiša ne pada. Da li je Steva u kući?	__________
4. Steva nije u kući. Da li pada kiša?	__________

Mogući odgovori su samo jedan od: DA, NE i NE ZNA SE.

Ako iskaz „Kiša pada” označimo sa p, a iskaz „Steva je u kući” označimo sa q, tada prva četiri pitanja glase:

1. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (p = \top)\big) \Rightarrow q = ?$
2. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (p = \bot)\big) \Rightarrow q = ?$
3. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q = \top)\big) \Rightarrow p = ?$
4. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q = \bot)\big) \Rightarrow p = ?$

Evo rešenja tih prvih 4 pitanja:

Sin Steva uvek izvršava naredbe svoga oca.

Otac je naredio sinu Stevi: „Ako pada kiša , ti si u kuću"

„Ako pada kiša , ti si u kuću" $\Leftrightarrow \quad p \Rightarrow q$

$p \Leftrightarrow$ kiša pada; $\quad q \Leftrightarrow$ Steva je u kući.

1. Kiša pada. Da li je Steva u kući? $\quad (\top \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; q = \top$
2. Kiša ne pada. Da li je Steva u kući? $\quad (\bot \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (q = \top \vee q = \bot)$
3. Steva je u kući. Da li pada kiša? $\quad (p \Rightarrow \top) \;\Leftrightarrow\; (p = \top \vee p = \bot)$
4. Steva nije u kući. Da li pada kiša? $\quad (p \Rightarrow \bot) \;\Leftrightarrow\; p = \bot$

Prema tome:

Odgovor na pitanje broj 1 jeste: DA tj. $q = \top$

Odgovor na pitanje broj 2 jeste: NE ZNA SE tj. $q \in \{\top, \bot\}$
Nekada DA, a nekada NE,
zavisno od Stevinog raspoloženja,

Odgovor na pitanje broj 3 jeste: NE ZNA SE tj. $p \in \{\top, \bot\}$
Nekada DA, a nekada NE,
zavisno od vremenskih prilika,

Odgovor na pitanje broj 4 jeste: NE tj. $p = \bot$

Ako je implikacija $p \Rightarrow q$ tačna i ako je $p = \bot$, tada odgovor na pitanje da li je q tačan glasi NE ZNA SE.

Ako je implikacija $p \Rightarrow q$ tačna i ako je $q = \top$, tada odgovor na pitanje da li je p tačan glasi NE ZNA SE.

Poenta je da se do ova dva prethodna zaključka dođe prirodno pomoću prethodnog testa!

Sa metodičko pedagoške tačke gledišta, ovako učenje logike, bez tablica istinitosti, je najispravniji način učenja. Učenje samo pomoću tablica istinitosti je pogrešno, kao što je i učenje matematike pomoću pamćenja formula ili korišćenjem tablica (puškica) katastrofalno pogrešno, faktički zločin u matematičkom obrazovanju!

Korektno rasuđivanje u matematici ne uči se samo proučavanjem logičkih formula i simbola, već korišćenjem sopstvene „prirodne" logike i izvanrednim primerima logičkog i metodološkog sadržaja.

U ovom radu posebno se ističe da je važno tautologije dokazivati (i) bez tablica istinitosti, odnosno prepoznavati da su to zakoni koji **postoje u ljudskoj svesti**.

Drugim rečima pravi se jedan konceptualno **ne**matematički prikaz, odnosno na **ne**matematički način se dolazi do formalizacije logike.

Dokaži sve logičke zakone (tautologije) iz sledeće tabele!

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$	$p \vee \top \Leftrightarrow \top$
$p \vee \bot \Leftrightarrow p$	$p \wedge \top \Leftrightarrow p$
$p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q)$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q)$
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$
$(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q \Leftrightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q \Leftrightarrow p)$
$\big((p \wedge q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q\big)$	$\big(p \Rightarrow q\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p\big)$

Iskaz $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q \Leftrightarrow q)$ je uvek tačan iskaz jer obe strane ekvivalencije su netačne ako i samo ako je p tačan i q netačan.

Iskaz $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ je uvek tačan iskaz jer obe strane ekvivalencije su netačne ako i samo ako su sva tri iskaza p, q i r netačna.

Iskaz $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ je uvek tačan iskaz jer obe strane ekvivalencije su netačne ako i samo ako je p netačan.

Kao što vidimo dokazivati tačnost prethodne dve formule pomoću tablica istinitosti je potpuno nepotrebno, ali čak i štetno, jer bi to odvlačilo od „razumnog" tj. „logičkog" razmišljanja!

Time su dokazani svi logički zakoni iz prethodne tabele!

UVOD U BULOVU

ALGEBRU

Sada ćemo pokazati kako se samo od zakona iz tabele

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \vee \bot \Leftrightarrow p$	$p \wedge \top \Leftrightarrow p$
$p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$

koje ćemo nazvati aksiomima, mogu jednostavnim rasuđivanjem (dokazivanjem?) dobiti svi ostali zakoni.

Ovo nije jedina mogućnost odabira aksioma. Bitno je samo da se svaki zakon može dobiti kao njihova posledica, a bilo koji od njih nije posledica preostalih!

Primetimo da se desna kolona prethodne tabele dobija od leve kolone, kada se u levoj koloni simboli $\wedge, \vee, \top, \bot$ zamene redom sa $\vee, \wedge, \bot, \top$, dok ostali simboli ostanu nepromenjeni. Ova pojava se zove dualizam u Bulovoj algebri!

Kako je skup aksioma Bulove algebre dualan, to onda i skup teorema Bulove algebre mora biti dualan!

Prvo ćemo radi lakšega rada uvesti kraće i praktičnije oznake.

Umesto $a \vee b$ pisaćemo $a + b$,

umesto $a \wedge b$ pisaćemo $a \cdot b$ odnosno ab,

umesto $\Leftrightarrow$ pisćemo $\; =$

umesto $\neg a$ pisćemo a',

umesto $\top$ pisaćemo 1 i umesto $\bot$ pisaćemo 0.

Kako je $a \Rightarrow b \Leftrightarrow a \vee b = b$, to ćemo umesto $a \Rightarrow b$ pisati $a + b = b$. Drugim rečima, zbog velikoga značaja implikacije, kao što smo već ranije videli, reći ćemo da su a i b u relaciji ako i samo ako je $a \Rightarrow b$ tj. $a + b = b$, što ćemo označavati i sa $a \preccurlyeq b$.

Sada zakoni iz gornje tabele postaju

$$\begin{array}{lll} B_1: & a+b=b+a & ; \ a\cdot b=b\cdot a \\ B_2: & a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c) & ; \ a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c) \\ B_3: & a+0=a & ; \ a\cdot 1=a \\ B_4: & a+a'=1 & ; \ a\cdot a'=0 \end{array}.$$

Umesto $a \cdot b$ pisaćemo kraće ab. Ovde podrazumevamo da binarna operacija $\cdot$ ima prednost u odnosu na binarnu operaciju $+$, pa zato umesto $a+(bc)$ pišemo samo $a+bc$ i umesto $(ab)+(ac)$ pišemo samo $ab+ac$.

Aksiomi B_1, B_2, B_3 i B_4 redom se nazivaju komutativnost, distributivnost, postojanje neutralnih elementa i komplementarnost.

Sada možemo dati definiciju Bulove algebre, čiji jedan primer tj. model je gore razmatrana iskazna algebra.

Definicija 0.1 *Neka je $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$ uređena šestorka gde su 0 i 1 dva različita elementa skupa B, $+$ i $\cdot$ binarne operacije skupa B i $'$ unarna operacija skupa B. Tada ova šestorka jeste Bulova algebra ako važe sledeći aksiomi:*

$$\begin{array}{lll} B_1: & a+b=b+a & ; \ ab=ba \\ B_2: & a(b+c)=ab+ac & ; \ a+bc=(a+b)(a+c) \\ B_3: & a+0=a & ; \ a\cdot 1=a \\ B_4: & a+a'=1 & ; \ aa'=0 \end{array}.$$

Kao što smo rekli operaciju $+$ zovemo disjunkcija, operaciju $\cdot$ zovemo konjunkcija i operaciju $'$ zovemo negacija.

Primer 0.2 *Uređena šestorka $\Big(\mathcal{P}(A),\cup,\cap,\ ^c\ ,\emptyset,A\Big)$, gde je $\mathcal{P}(A)$ skup svih podskupova skupa A (partitivni skup skupa A), $A\neq\emptyset$, a unarna operacija ^{c} definisana sa $\Big(\forall X\in\mathcal{P}(A)\Big)X^c = A\setminus X = \{x|x\in A\wedge x\notin X\}$ jeste Bulova algebra. Koristi se i oznaka $\overline{X}=X^c$.*

Primer 0.3 *Neka je D_{30} skup svih delioca celog broja trideset tj. $D_{30}=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Tada je $(D_{30}, NZS, NZD,\ '\ ,1,30)$ Bulova algebra, gde je NZS(m,n) najmanji zajednački sadržalac brojeva m i n, NZD(m,n) najveći zajednički delilaca brojeva m i n, a operacija $'$ definisana sa $a'=\frac{30}{a}$ za svaki broj a iz D_{30}.*

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 0.4

$a + a = a \qquad ; \qquad aa = a \qquad$ *idempotentnost*

Dokaz: $a \overset{B_3}{=} a + 0 \overset{B_4}{=} a + aa' \overset{B_2}{=} (a + a)(a + a') \overset{B_4}{=} (a + a) \cdot 1 \overset{B_3}{=} a + a$

Teorema 0.5

$a + 1 = 1 \qquad ; \qquad a \cdot 0 = 0 \qquad$ *ograničenost*

Dokaz: $a+1 \overset{B_1,B_3}{=\!=} 1 \cdot (a+1) \overset{B_4}{=} (a+a')(a+1) \overset{B_2}{=} a+a' \cdot 1 \overset{B_3}{=} a+a' \overset{B_4}{=} 1$

Teorema 0.6

$a + ab = a \qquad ; \qquad a(a + b) = a \qquad$ *apsorcija*

Dokaz: $a + ab \overset{B_3}{=} a \cdot 1 + ab \overset{B_2}{=} a(1 + b) \overset{4.6}{=} a \cdot 1 \overset{B_3}{=} a$

Teorema 0.7

$a + a'b = a + b \qquad ; \qquad a(a' + b) = ab$

Dokaz: $a + a'b \overset{B_2}{=} (a + a')(a + b) \overset{B_4}{=} 1 \cdot (a + b) \overset{B_1,B_3}{=\!=} a + b$

Teorema 0.8

$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad ; \qquad (ab)c = a(bc) \qquad$ *asocijativnost*

Dokaz:

$(a+b)+c \overset{B_3}{=} 1\cdot\Big((a+b)+c\Big) \overset{B_4}{=} (a+a')\Big((a+b)+c\Big) \overset{B_2}{=} \Big(a(a+b)+ac\Big)+$
$\Big(a'(a + b) + a'c\Big) \overset{0.4,B_2,B_4}{=\!=\!=} a + (a'b + a'c) \overset{B_2}{=} a + a'(b + c) \overset{0.7}{=} a + (b + c)$

Teorema 0.9

Sistem jednačina $\quad a + x = 1 \wedge a \cdot x = 0 \quad$ *ima jedinstveno rešenje*

Dokaz: Zbog aksioma B_4 sledi da $x = a'$ jeste rešenje datoga sistema. Dokažimo kontradikcijom da rešenja više nema. Pretpostavimo da $b \neq a'$ takođe jeste rešenje datog sistema. Tada je:
$b = b\cdot 1 = b(a+a') = ba+ba' = 0+ba' = aa'+ba' = (a+b)a' = 1\cdot a' = a'$.
Kontradikcija sa $b \neq a'$.

Teorema 0.10

$0' = 1 \qquad ; \qquad 1' = 0$

Dokaz: Sistem

$$0 + x = 1 \quad \wedge \quad 0 \cdot x = 0$$

ima za rešenja $x = 0'$ zbog B_4 i $x = 1$ zbog B_3, a kako taj sistem zbog teoreme 0.9 ima samo jedno rešenje, sledi da je $0' = 1$.

Teorema 0.11
$(a')' = a \qquad ;$

Dokaz: Sistem

$$a' + x = 1 \quad \wedge \quad a' \cdot x = 0$$

ima za rešenja $x = a$ i $x = (a')'$ zbog B_1 i B_4, a kako taj sistem zbog teoreme 0.9 ima samo jedno rešenje, sledi da je $a = (a')'$.

Teorema 0.12
$(a + b)' = a'b' \qquad ; \qquad (ab)' = a' + b'$ *Demorganovi zakoni*

Dokaz: Sistem

$$(a + b) + x = 1 \quad \wedge \quad (a + b) \cdot x = 0$$

ima za rešenje $x = (a + b)'$ zbog B_4 i $x = a'b'$ zbog $(a + b) + a'b' = (a+b+a') \cdot (a+b+b') = 1 \cdot 1 = 1$ i $(a+b) \cdot a'b' = aa'b' + ba'b' = 0+0 = 0$. Međutim zbog teoreme 0.9 sistem $(a + b) + x = 1 \quad \wedge \quad (a + b) \cdot x = 0$ ima samo jedno rešenje pa mora biti $(a + b)' = a'b'$.

Indukcijom se dokazuje uopštenje $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)' = a_1' a_2' \cdots a_n'$.

Definicija 0.13 *Bulova algebra* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *je podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *ako i samo ako je* $C \subseteq B$ *i operacije iz* $\mathcal{C}$ *su restrikcije operacije iz* $\mathcal{B}$.

Teorema 0.14 *Neka je* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra i* $C \subseteq B$. *Tada* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *je podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *ako i samo ako za svako* a *i* b *iz skupa* C *važi* $a + b \in C$, $ab \in C$ *i* $a' \in C$.[1]

Dokaz:
Dovoljno je dokazati samo da 0 i 1 iz skupa B pripadaju skupu C. Iz $a + a' \in C$ i $a + a' = 1 \in B$ sledi $1 \in C$, a iz $aa' \in C$ i $aa' = 0 \in B$ sledi $0 \in C$.

[1] Sada je jasno da su operacije $+$, $\cdot$ i $'$ iz C restrikcije operacija $+$, $\cdot$ i $'$ iz B.

Definicija 0.15 *U Bulovoj algebri* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *definiše se binarna relacija* $\preccurlyeq$*:*

$$(\forall x \in B)(\forall y \in B) \ \ x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y$$

Teorema 0.16 *U Bulovoj algebri* $\mathcal{B}$ *sledeći iskazi su ekvivalentni:*
a) $x + y = y$ *b)* $xy = x$ *c)* $x' + y = 1$ *d)* $xy' = 0$.

Dokaz: Ako se jednakost a) pomnoži sa x i primeni zakon apsorcije dobija se b). Dodavanjem elementa x' levoj i desnoj strani jednakosti b), primenom aksioma B_2, B_4 i B_3 sledi c). Primenom unarne operacije $'$ na c) dobija se d). Ako dodamo y levoj i desnoj strani jednakosti d), primenimo aksioma B_2, B_4 i B_3 sledi a). Kako smo pokazali da $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$, to je teorema dokazana.

Ovim smo dali četiri ekvivalentne definicije relacije $\preccurlyeq$.

Teorema 0.17 *Relacija* $\preccurlyeq$ *u Bulovoj algebri* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *jeste relacija poretka tj. za svako* $x, y, z \in B$ *važi:*
a) $x \preccurlyeq x$*; b)* $\Big(x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq x\Big) \ \Rightarrow \ x = y$*; c)* $\Big(x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq z\Big) \ \Rightarrow \ x \preccurlyeq z$

Dokaz: a) $x \preccurlyeq x \Leftrightarrow x + x = x$;
b) $\Big(x \preccurlyeq y \ \land \ y \preccurlyeq x\Big) \Rightarrow \Big(x + y = y \ \land \ y + x = x\Big) \Rightarrow x = y$;
c) $\Big(x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow x + y = y \land y + z = z \Rightarrow x + y + z = y + z \Rightarrow x + z = z$ jer smo $y + z$ zamenili sa z.

Primer 0.18 $(\{1, 5, 6, 30\}, NZS, NZD, \ ' \ , 1, 30)$ *je Bulova podalgebra Bulove algebre* $(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, NZS, NZD, \ ' \ , 1, 30)$.

Dokaz: Na osnovu zatvorenosti operacija $+, \cdot$ i $'$ u skupu$\{1, 5, 6, 30\}$ i na osnovu teoreme 0.14 sledi tvrdnja primera.

Teorema 0.19 *U Bulovoj algebri* $\mathcal{B}$ *za svako* x *i* y *iz* B *važi:*
a) $x \preccurlyeq x + y$*; b)* $y \preccurlyeq x + y$*; c)* $xy \preccurlyeq x$*; d)* $xy \preccurlyeq y$.

Dokaz: a) $x \preccurlyeq x + y \Leftrightarrow x + y = x + y$; c) $xy \preccurlyeq x \Leftrightarrow xy + x = x$.

Teorema 0.20 *U Bulovoj algebri* $\mathcal{B}$ *za svako* x, y *i* z *iz* B *važi:*
a) $\Big(x \preccurlyeq z \ \land \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow x + y \preccurlyeq z$*; b)* $\Big(u \preccurlyeq x \ \land \ u \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow u \preccurlyeq xy$.

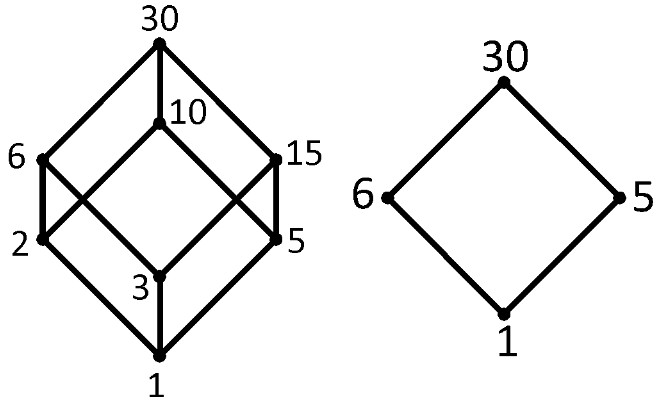


Figure 2:

Dokaz:
a) $\Big(x \preccurlyeq z \wedge y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow \Big(x + z = z \wedge y + z = z\Big) \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y + z = z \Rightarrow x + y \preccurlyeq z.$
b) $\Big(u \preccurlyeq x \wedge u \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow \Big(ux = u \wedge uy = u\Big) \Rightarrow uxy = u \Rightarrow u \preccurlyeq xy.$

Na osnovu teorema 0.19 i 0.20 sledi da je $x + y$ najmanje gornje ograničenje (supremum) tj. najmanji elemenat u skupu gornjih ograničenja za skup $\{x, y\}$, a xy najveće donje ograničenje (infinum) za skup $\{x, y\}$.

Najmanje gornje ogrničenje (supremum), ukoliko postoji, jedinstveno je određen elemenat, jer je on najmanji elemenat u skupu svih gornjih granica nekog podskupa skupa B. Na primer u odnosu na relaciju $\leq$, u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ne postoji najmanje gornje ograničenje za skup $\{x|x^2 < 2 \ \wedge \ x \in \mathbb{Q}\}$, dok u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ za isti taj skup $\{x|x^2 < 2 \ \wedge \ x \in \mathbb{Q}\}$ postoji najmanje gornje ograničenje (supremum) i to je broj $\sqrt{2}$. Da li se ovo poslednje može dokazati?

Teorema 0.21 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x, y i z iz B važi:*
a) $x \preccurlyeq y \Rightarrow x + z \preccurlyeq y + z$; *b)* $x \preccurlyeq y \Rightarrow xz \preccurlyeq yz.$

Teorema 0.22 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x iz B važi:*
a) $0 \preccurlyeq x$; *b)* $x \preccurlyeq 1$

Dokaz: a) $0 \preccurlyeq x \Leftrightarrow 0 + x = x$ (B_1, B_3); b) $x \preccurlyeq 1 \Leftrightarrow x \cdot 1 = x$ (B_3)

Znači 0 je najmanji elemenat, a 1 najveći elemenat skupa B u odnosu na relaciju poretka (parcijalnog uređenja) $\preccurlyeq$.

Teorema 0.23 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x i y iz B važi:*

$$xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \wedge \ y = 1$$

Dokaz: $xy = 1 \Rightarrow x(xy) = x \cdot 1 \Rightarrow (xx)y = x \Rightarrow xy = x$. Analogno se dobija $xy = y$ pa sledi $x = y$. Sada iz $xy = 1$ i $x = y$ sledi $x = y = 1$.

Teorema 0.24 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x i y iz B važi:*

$$x = y \ \Leftrightarrow \ (x' + y)(x + y') = 1; \qquad x = y \Leftrightarrow x'y + xy' = 0$$

Dokaz: Iz $(x'+y)(x+y') = 1$ na osnovu teoreme 0.23 sledi $(x'+y) = 1$ i $(x + y') = 1$, a odavde na osnovu teoreme 0.16 je $x \preccurlyeq y$ i $y \preccurlyeq x$ tj. $x = y$. Drugi deo teoreme je dualan prvom delu.

Primer 0.25 *Zaokružiti slova ispred iskaza koji su tačni u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:* **a)** $x + y = (x'y')'$ **b)** $xy = (x' + y')'$ **c)** $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ **d)** $x = y \Rightarrow x' = y'$ **e)** $x' = y' \Rightarrow x = y$ **f)** $f(x) = x' \Rightarrow f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\rightarrow}} B$

Definicija 0.26 *Elemenat $p \neq 0$ Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je* atom *ako ne postoji elemenat $x \in B$ različit od 0 i različit od p takav da je $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq p$.*

Teorema 0.27 *Neki elemenat $p \in B$ različit od nule je atom Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ akko iz $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq p$ sledi $x = 0 \ \vee \ x = p$.*

Teorema 0.28 *Elemenat $p \in B$ različt od nule je atom Bulove algebre $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ ako i samo ako za svako x iz B važi:*

$$p \preccurlyeq x \ \Rightarrow \ px = p \quad i \quad p \not\preccurlyeq x \ \Rightarrow \ px = 0.$$

Drugim rečima $p \neq 0$ je atom ako i samo ako za svako x iz B je px jednako ili sa 0 ili sa p tj.

$$px = \begin{cases} p & \text{za } p \preccurlyeq x \\ 0 & \text{za } p \not\preccurlyeq x \end{cases}$$

Dokaz: Neka je p atom.

Prva implikacija sledi iz definicije 0.15 i teoreme 0.16. Dokažimo sada drugu implikaciju. Kako je $p \not\preccurlyeq x$ ekvivalentno sa $px' \neq 0$ takođe zbog 0.15 i 0.16 i kako je $px' \preccurlyeq p$ (zbog $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow ab = a$) to zbog teoreme 0.27 sledi $px' = p$, a odavde „množenjem" sa x sledi $(px')x = px$ tj. $px = 0$.

Obratno, ako važe gornje implikacije pokažimo da je p atom. Predpostavimo da postoji x takav da je $x \neq 0$ i $x \neq p$ i $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq p$ tj. da p nije atom. Tada je $px = x$ (zbog $x \preccurlyeq p$) i $px = 0$ zbog druge implikacije i $(x \neq p \ \wedge \ x \preccurlyeq p) \Rightarrow p \not\preccurlyeq x$. Znači dobili smo da je $x = 0$ što je naravno kontradikcija sa $x \neq 0$. Prema tome p jeste atom.

Teorema 0.29 *Ako je* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra, tada minimalni elementi (??) skupa* $B \setminus \{0\}$ *u odnosu na relaciju poretka* $\preccurlyeq$ *definisanu sa* $x + y = y$ *(ili* $xy = x$ *ili* $xy' = 0$ *ili* $x' + y = 1$*) jesu atomi Bulove algebre* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

Teorema 0.30 *U svakoj konačnoj Bulovij algebri* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *za svaki elemenat* $x \in B \setminus \{0\}$ *postoji atom* p *takav da je* $p \preccurlyeq x$.

Dokaz: Iz definicije atoma sledi da za svako $x \in B \setminus \{0\}$ ili je x atom ili postoji $u_1 \in B$ takav da je $0 \preccurlyeq u_1 \preccurlyeq x$ i $u_1 \notin \{0, x\}$. Ako x nije atom i u_1 nije atom, tada postoji $u_2 \in B$ takav da je $0 \preccurlyeq u_2 \preccurlyeq u_1$ i $u_2 \notin \{0, u_1\}$. Na taj način je konstruisan niz $0 \preccurlyeq ... \preccurlyeq u_n \preccurlyeq ... \preccurlyeq u_2 \preccurlyeq u_1$ u kome su svaka dva različita i kome se mora pojaviti atom, jer u protivnom se dobija beskonačni niz elemenata iz B u kome su svaka dva različita, što je kontradikcija sa konačnosti skupa B.

Definicija 0.31 *Funkcija* $f : B \to C$ *jeste homomorfizam Bulovih algebri* $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *i* $(C, \oplus, \odot, \bar{}, 0^*, 1^*)$ *ako je* $f(0) = 0^*$, $f(1) = 1^*$, $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$, $f(xy) = f(x) \odot f(y)$, $f(x') = \overline{f(x)}$.

Definicija 0.32 *Bijektivni homomorfizam zove se izomorfizam, a izomorfizam Bulove algebre u samu sebe zove se automorfizam.*

Primer 0.33 *Bulova algebra* $(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, NZS, NZD, \ ', 1, 30)$ *izomorfna je sa* $\Big(\Big\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}\Big\}, \cup, \cap, \ ^c, \emptyset, \{2, 3, 5\}\Big)$, *gde je izomorfizam naprimer funkcija*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \\ \emptyset & \{2\} & \{3\} & \{5\} & \{2,3\} & \{2,5\} & \{3,5\} & \{2,3,5\} \end{pmatrix},$$

gde su $'$ *i* ^{c} *definisane sa* $n' = \frac{30}{n}$ *i* $A^c = \overline{A} = \{2, 3, 5\} \setminus A$.

Teorema 0.34 *Neka je* $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *konačna Bulova algebra i neka je* S *skup svih atoma te Bulove algebre. Neka je za svako* $x \in B \setminus \{0\}$ *definisan skup*

$$\pi(x) = \{p | p \in S \ \wedge \ p \preccurlyeq x\} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}. \ \ Tada$$

$$x = p_1 + p_2 + ... + p_n$$

jeste jedinstveno predstavljanje elementa x *(do na komutativnost i asocijativnost).*

Dokaz: Kako je $x \neq 0$ to je $\pi(x) \neq \emptyset$ zbog konačnosti skupa B i 0.30.

Prvo dokazujemo da je $x = p_1 + p_2 + ... + p_n$. Dokaz izvodimo tako što pokazujemo da su elemenat x i elemenat $p_1 + p_2 + ... + p_n$ najmanje gornje ograničenje (supremum) za skup $\pi(x) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ tj. svaki od njih i x i $p_1 + p_2 + ... + p_n$ jeste najmanji elemenat skupa svih gornjih granica za skup $\pi(x)$, za koji je poznato da je jedinstven **??**.

Pokazali smo ranije da je $p_1 + p_2 + ... + p_n$ najmanje gornje ograničenje za $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ 0.19 i 0.20. Sada pokazujemo da je i x najmanje gornje ograničenje za $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ tj. da važi $(\bigstar) : \Big(\forall p_i \in \pi(x)\Big) \ p_i \preccurlyeq y$ implicira $x \preccurlyeq y$. Dokažimo kontradikcijom. Predpostavimo da je

$x \not\preccurlyeq y$. Sada sledi $x \not\preccurlyeq y \overset{0.16}{\Rightarrow} xy' \neq 0 \overset{0.30}{\Rightarrow} p \preccurlyeq xy'$ za neki atom $p \in S$. Iz $p \preccurlyeq xy'$ sledi $p \preccurlyeq x$ pa je $p \in \pi(x)$, a onda je zbog ($\bigstar$) i $p \preccurlyeq y$. Kako $p \preccurlyeq xy'$ implicira i $p \preccurlyeq y'$ i kako iz nje i iz relacije $p \preccurlyeq y$ sledi $p \preccurlyeq yy' = 0$, to smo došli do kontradikcije jer je p atom. Prema tome $x \preccurlyeq y$ što znači da je i x supremum za $\pi(x) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, pa je $x = p_1 + p_2 + ... + p_n$, jer je supremum najmanji elemenat u skupu svih gornjih ograničenja, a on je jedinstven po teoremi **??**.

Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je x zbir (unija) svih atoma iz nekog skupa atoma $P = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq S$, tj. $x = a_1 + a_2 + ... + a_m$. Dokazaćemo da je $P = \pi(x)$. Ako je $q \in P$, tada je $q = a_i$, a zbog $a_i \preccurlyeq a_1 + a_2 + ... + a_m$ sledi $q \preccurlyeq x$ tj. $q \in \pi(x) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ odnosno $P \subseteq \pi(x)$. Neka je sada $p \in \pi(x)$ tj. $p = p_i$. Tada je $p_i = p_i x = p_i(a_1 + a_2 + ... + a_m) = p_i a_1 + p_i a_2 + ... + p_i a_m$. Ako bi p_i bio različit od svakog elementa iz $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, tada bi imali da je $p_i = 0$ (jer je proizvod dva različita atoma jednak 0) što je nemoguće. Znači $p_i \in P$, pa je $\pi(x) \subseteq P$, odnosno $\pi(x) = P$.

Posledica 0.35 *U svakoj konačnoj Bulovoj algebri jedinica je jednaka zbiru svih njenih atoma.*

Sledeća teorema je teorema Stona o reprezentaciji Bulovih algebri. [2]

Teorema 0.36 *Neka je S skup atoma Bulove algebre $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ i neka je $\mathcal{P}(S)$ skup svih podskupova skupa S tj. partitivni skup od skupa svih atoma S. Tada funkcija*

$$\pi : B \to \mathcal{P}(S) \quad \textit{definisana} \quad \textit{sa} \quad \pi(x) = \{p | p \in S \ \wedge \ p \preccurlyeq x\},$$

jeste izomorfizam bulovih algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ i $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, S)$, gde je unarna operacija komplement skupa $\overline{}$ definisana sa $\overline{A} = S \setminus A = \{x | x \in S \wedge \ x \notin A\}$.

Dokaz: Injektivnost funkcije $\pi : B \to \mathcal{P}(S)$ sledi iz

$$\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow x \overset{0.34}{=} \sum_{t \in \pi(x)} t = \sum_{t \in \pi(y)} t \overset{0.34}{=} y.$$

Sirjektivnost funkcije $\pi : B \to \mathcal{P}(S)$ sledi iz

$$\Big(\forall X \in \mathcal{P}(S)\Big)\Big(\exists x \in B\Big) \ \Big(x = \sum_{t \in X} t \overset{0.34}{\Rightarrow} \ x = \sum_{t \in \pi(x)} t\Big) \ \overset{0.34}{\Rightarrow} \pi(x) = X.$$

Da bi pokazali homomorfnost funkcije $\pi : B \to \mathcal{P}(S)$ treba dokazati:
$\pi(x + y) = \pi(x) \cup \pi(y)$ $\qquad$ $\pi(xy) = \pi(x) \cap \pi(y)$ $\qquad$ $\pi(x') = \overline{\pi(x)}$.

$p \in \pi(x + y) \Rightarrow p \preccurlyeq x + y \Rightarrow p(x + y) = p \Rightarrow px + py = p$, a kako na osnovu 0.28 elementi px i py su iz $\{p, 0\}$ to je bar jedan od px i py jednak sa p jer u protivnom ako su obojica 0 imali bi da je $0 = p$ što nemože biti jer je p atom. Neka je naprimer $px = p$ što znači $p \preccurlyeq x$ odnosno $p \in \pi(x)$ tj. $p \in \Big(\pi(x) \cup \pi(y)\Big)$. Analogno se dešava i za $py = p$.

Iz $p \in \Big(\pi(x) \cup \pi(y)\Big)$ sledi da p pripada bar jednom od skupova $\pi(x)$ ili $\pi(y)$ i neka je naprimer $p \in \pi(x)$ što dalje implicira $p \preccurlyeq x \preccurlyeq (x + y) \Rightarrow p \preccurlyeq (x + y) \Rightarrow p \in \pi(x + y)$.

Prema tome iz prethodna dva pasusa sledi $\pi(x + y) = \pi(x) \cup \pi(y)$.

$p \in \pi(xy) \Rightarrow p \preccurlyeq xy \preccurlyeq x$ tj. $p \preccurlyeq x$ odnosno $p \in \pi(x)$. Analogno se dobija da je i $p \in \pi(y)$ tj. $p \in \Big(\pi(x) \cap \pi(y)\Big)$.

Iz $p \in \Big(\pi(x) \cap \pi(y)\Big) \ \Rightarrow \ p \in \pi(x) \ \wedge p \in \pi(y) \ \Rightarrow p \preccurlyeq x \ \wedge \ p \preccurlyeq y \ \Rightarrow \ p \preccurlyeq xy \ \Rightarrow \ p \in \pi(xy)$.

Prema tome iz prethodna dva pasusa sledi $\pi(xy) = \pi(x) \cap \pi(y)$.

Dalje imamo $p \in \pi(x') \overset{0.34}{\Leftrightarrow} p \preccurlyeq x' \overset{0.15, 0.16}{\Longleftrightarrow} px' = p \overset{0.28}{\Leftrightarrow} px' \neq 0 \overset{0.15, 0.16}{\Longleftrightarrow} p \not\preccurlyeq x \overset{0.34}{\Leftrightarrow}$
$\overset{0.34}{\Leftrightarrow} p \notin \pi(x) \Leftrightarrow p \in \overline{\pi(x)}$ odnosno $\pi(x') = \overline{\pi(x)}$.

---

[2] Stone M. H, The theory of representations for Boolean algebras. Amer. Math. Soc. 40, 37-111, 1936.

Posledica 0.37 *Svaka konačna Bulova algebra ima 2^n elemenata, gde je n broj njenih atoma i svake dve Bulove algebre sa jednakim brojem elemenata su izomorfne.*

Bulove funkcije Jedan od vrlo važnih pojmova Bulovih algebri, naročito u primenama, je pojam Bulovih funkcija.

Definicija 0.38 *Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra. Funkcija od n nezavisno promenljivih $f : B^n \to B$ tj. funkija koja uređene n− torke čije komponente su iz B preslikava u elemente skupa B je Bulova funkcija akko za svaku n- torku $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n$ važi:*

1) *Konstantne funkcije tj. funkcije oblika $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a$, gde je a fiksni elemenat iz B jesu Bulove funkcije.*

2) *Projekcije, tj. funkcije oblika $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$ za proizvoljno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ jesu Bulove funkcije.*

3) *Ako su f i g Bulove funkcije, tada su to i funkcije $f'(x_1, ..., x_n) = \Big(f(x_1, ..., x_n)\Big)'$, $(f+g)(x_1, ..., x_n)=f(x_1, ..., x_n)+g(x_1, ..., x_n)$ i $(f\cdot g)(x_1, ..., x_n) =f(x_1, ..., x_n)\cdot g(x_1, ..., x_n)$.*

4) *Bulove funkcije se mogu dobiti samo primenom* **1), 2)** *i* **3)** *i to konačno mnogo puta.*

Drugim rečima skup Bulovih funkcija sadrži kostantne funkcije, projekcije, funkcije (operacije) $+$, $\cdot$ i $'$ i zatvoren je u odnosu na kompoziciju (superpoziciju) funkcija.

Kompoziciono zatvoreni skupovi funkcija koji sadrže sve projekcije (kao i Bulove funkcuje) zovu se zovu se **klonovi** funkcija. Ime klon potiče od grčke reči $\kappa\lambda o\nu o\sigma$ što znači izdanak, jer sve funkcije jednoga klona izrastaju pomoću superpozicija (kompozicija) iz nekih funkcija za koje se onda kaže da ga generišu. Znači klon Bulovih funkcija generisan je sa svim konstantama i funkcijama (operacijama) $+$, $\cdot$ i $'$. Danas postoje mnogobrojni i značajni naučni radovi, za razne oblasti, o klonovima.

Teorema 0.39 *Ako je skup B dvočlan tj. $B = \{0, 1\}$ tada svaka funkcija $f : B^n \to B$ jeste Bulova.*

Dokaz je posledica teoreme 0.48.

Ovde će se proučavati samo funkcije dvoelementnih Bulovih algebri koje su sve Bulove.

Svaka Bulova funkcija se može definisati tablično ili Bulovim izrazom. Na primer funkcija f zadata Bulovim izrazom $f(x, y, z, u) = yu + x'u + y'z'u'$ i ista ta funkcija tablično

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f(x,y,z,u)	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1

Definicija 0.40 *Konstanta skupa B je proizvoljni elemenat skupa B. Promenljiva skupa B je simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa B.*

Definicija 0.41 **1)** *Konstantne i promenljive su Bulovi izrazi.*

2) *Ako su A i B bulovi izrazi, tada su $(A+B)$, $(A \cdot B)$ i A' takođe Bulovi izrazi.*

3) *Bulovi izrazi se mogu dobiti samo primenom* **1)** *i* **2)** *i to konačno mnogo puta.*

Da li ova definicija ima neke veze sa definicijom 0.38? Da li je to na neki način isto?
Očevidno, svaki Bulov izraz jednoznačno određuje jednu Bulovu funkciju!

Primeri promenljivih: $x, y, z, u, x_1, y_1, z_1, u_1, ...$

Primeri Bulovih izraza: $x, (x+y), ((xy')+y(x'+y)), (1+(xy')), \cdots$

Uvodi se dogovor o brisanju leve i desne krajnje zagrade, kao i konvencija da operacija $\cdot$ ima prednost u odnosu na operaciju $+$ i shodno tome brišu se odgovarajuće zagrade, pa od predhodnih Bulovih izraza sledi da su i $x+y, xy'+y(x'+y), 1+xy', ...$ takođe Bulovi izrazi.

Primetimo da svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, dok za svaku Bulovu funkciju postoji više Bulovih izraza koji definišu istu bulovu funkciju. Na primer Bulovi izrazi $x' + y'$ i $(xy)'$ određuju istu Bulovu funkciju $f(x, y) = x' + y' = (xy)'$ čija tablična reprezentacija je

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f(x,y)	1	1	1	0

Sada ćemo definisati neke posebne Bulove izraze koji su od velikog značaja u daljem radu.

Definicija 0.42 *Monom je promenljiva ili njegova negacija.*

Primeri monoma: $x, y, z, u, x_1, y_1, z_1, u_1, x', y', z', u', x_1', y_1', z_1', u_1', ...$

Definicija 0.43 *Elementarna konjunkcija je konjunkcija (proizvod) monoma. Elemenat* 1 *Bulove algebre jeste elementarna konjunkcija.*

Primeri elementarnih konjunkcija: $x, xy', x'yzu, 1, x_1'yz_2'$,...

Definicija 0.44 *Disjunktivna normalna forma u oznaci DNF je disjunkcija (zbir) elementarnih konjunkcija.*

Primeri DNF: $x + u'z + x'yzu'$, xy', $x + y$, $x_1y'x + y_1z'$, 1, $\dots$

Definicija 0.45 *Savršena disjunktivna normalna forma skupa promenljivih $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, u oznaci $SDNF$, je disjunkcija (zbir) elementarnih konjunkcija, takvih da se u svakoj elementarnoj konjunkciji pojavljuje svaka od promenljivih skupa A.*

Primeri $SDNF$ za skup promenljivih $A = \{x, y, z\}$:
$xy'z + x'yz + xyz$, $xy'z$, $xyz' + x'y'z' + xy'z'$, $\dots$

Analogno, dualno, se definišu elementarna disjunkcija, konjunktivna normalna forma KNF i savršena konjunktivna normalna forma $SKNF$.

Sada ćemo pokazati da se svaka Bulova funkcija može predstaviti pomoću $SDNF$. U tu svrhu uvodimo sledeću definiciju (oznaku).

Definicija 0.46 $x^\alpha = \begin{cases} x & za \quad \alpha = 1 \\ x' & za \quad \alpha = 0 \end{cases}$ *tj.* $x^1 = x$ *i* $x^0 = x'$.

Teorema 0.47 $x^\alpha = \begin{cases} 0 & za \quad x \neq \alpha \\ 1 & za \quad x = \alpha \end{cases}$

Dokaz: $0^0 = 0' = 1, \quad 0^1 = 0, \quad 1^0 = 1' = 0, \quad 1^1 = 1.$

Sada možemo formulisati i dokazati teoremu o reprezentaciji proizvoljne Bulove funkcije pomoću $SDNF$.

Teorema 0.48

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Na primeru od tri nezavisno promenljive tj. za $n = 3$ prethodna teorema ima oblik: $f(x, y, z) =$
$f(0,0,0)x^0y^0z^0 + f(0,0,1)x^0y^0z^1 + f(0,1,0)x^0y^1z^0 + f(0,1,1)x^0y^1z^1 +$
$+ f(1,0,0)x^1y^0z^0 + f(1,0,1)x^1y^0z^1 + f(1,1,0)x^1y^1z^0 + f(1,1,1)x^1y^1z^1$

Proverimo sada da li je ova jednakost tačna za naprimer $(x, y, z) = (0, 1, 1)$. Ako uvrstimo $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, tada na desnoj strani svi sabirci (elementarne konjunkcije), izuzev četvrtog po redu će biti nule, jer u svim tim sabircima će se na bar jednom mestu razlikovati osnova od eksponenta pa će zbog 0.47 ti sabirci biti jednaki 0, a četvrti će biti $f(0,1,1)$. Time je naša jednakost postala $f(0,1,1) = f(0,1,1)$ tj. tačna. Kako će se ovo očevidno uvek desiti za svaku trojku $(x,y,z) \in \{0,1\}^3$ time je teorema dokazana.

Dokaz smo sproveli za $n = 3$, međutim to očevidno važi i za svako $n \in \mathbb{N}$.

Neka je Bulova funkcija f zadata sledećom tablicom:

0	0	0	0	1	1	1	1	x
0	0	1	1	0	0	1	1	y
0	1	0	1	0	1	0	1	z
1	0	1	0	0	0	1	1	$f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + xyz' + xyz$

Na osnovu prethodne teoreme 0.48 odnosno na osnovu njenog specijalnog slučaja za $n = 3$ $f(x,y,z) =$
$f(0,0,0)x'y'z' + f(0,0,1)x'y'z + f(0,1,0)x'yz' + f(0,1,1)x'yz +$
$+f(1,0,0)xy'z' + f(1,0,1)xy'z + f(1,1,0)xyz' + f(1,1,1)xyz$

sledi da njena $SDNF$ je:

$$f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + xyz' + xyz.$$

Kao što smo rekli posmatraćemo samo Bulove funkcije na dvoelementnom skupu $B = \{0,1\}$. Bulovih funkcija od jedne nezavisno promenljive (unarnih operacija skupa B) $f : B \to B$ ima samo 4 i to su:

$$f_1 = \binom{01}{00} \qquad f_2 = \binom{01}{01} \qquad f_3 = \urcorner = \binom{01}{10} \qquad f_4 = \binom{01}{11}$$

Ove fukcije redom se zovu univerzalna negacija, identička funkcija, negacija i univerzalna afirmacija.

U sledećoj tabeli za oznake funkcija (operacija) koristićemo simbole iz iskazne algebre odnosno uzimamo da
$x + y$ je $x \vee y$ i zove se disjunkcija, xy je $x \wedge y$ i zove se konjunkcija, $x' + y$ je $x \Rightarrow y$ i zove se implikacija, $x'y' + xy$ je $x \Leftrightarrow y$ i zove se ekvivalencija, $x'y + xy'$ je $x \oplus y$ i zove se sabiranje pomodulu 2, a zove se još i ekskluzivno ili, $x' + y'$ je $x \overline{\wedge} y$ (obeležava se i sa $\uparrow$) i zove se ni, a zovu je još i Šeferova funkcija, $x'y'$ je $x \overline{\vee} y$ (obeležava se i sa $\downarrow$) i zove se nili, a zovu je još i Lukašijevićeva funkcija. I preostalim funkcijama dodeljena su neka imena ali ih mi nećemo navoditi.

Iskazna algebra je samo jedan primer Bulove algebre zbog kojega se u mnogim knjigama operacije $+$, $\cdot$ i $'$ označavaju redom sa $\vee$, $\wedge$ i

$\neg$, dok u modelu algebre skupova koriste se redom simboli $\cup$, $\cap$ i ^{c}.

Bulovih funkcija od dve nezavisno promenljive (binarnih operacija skupa B) ima 16 i evo 7 najkorišćenijih:

x	y	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\oplus$	$\overline{\wedge}$	$\overline{\vee}$	...
0	0	0	0	1	1	0	1	1	...
0	1	0	1	1	0	1	1	0	...
1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
1	1	1	1	1	1	0	0	0	...

Kako smo dokazali teoremu 0.48 to znači da se svaka Bulova funkcija može predstaviti (kao njihova kompozicija tj. superpozicija) pomoću funkcija $+$, $\cdot$ i $'$. Zato se za skup funkcija $\{+, \cdot, '\}$ kaže da je generatorni za skup svih Bulovih funkcija. Sada se postavlja pitanje da li i izbacivanjem neke funkcija iz skupa funkcija $\{+, \cdot, '\}$ novo nastali dvočlani skup funkcija i dalje jeste generatorni? Zbog identiteta (teoreme) $x + y = (x'y')'$ sledi da se funkcija (operacija) $+$ može izraziti pomoću operacija (funkcija) skupa $\{\cdot, '\}$, što znači da je odgovor na prethodno pitanje DA.

Prema tome skup funkcija $\{\cdot, '\}$ takođe je generatorni i može se pokazati da izbacivanjem bilo koje funkcije iz skupa $\{\cdot, '\}$ novodobijeni skup funkcija nije više generatorni, pa se za takve generatorne skupove funkcija kaže da su baze skupa Bulovih funkcija. Znači $\{\cdot, '\}$ jeste jedna dvočlana baza. Očevidno je da i $\{+ , '\}$ jeste baza skupa svih Bulovih funkcija. Postavlja se sada pitanje da li postoje jednočlane baze? Odgovor je potvrdan što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 0.49 *Jednočlani skupovi funkcija $\{\overline{\wedge}\}$ i $\{\overline{\vee}\}$ jesu baze skupa Bulovih funkcija.*

Dokaz: Iz definicija ni funkcije $\overline{\wedge}$ (Ševerove funkcije $\uparrow$), funkcije negacije $\neg$ i disjunkcije $\vee$ sledi

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \overline{\wedge} x$	$y \overline{\wedge} y$	$x \vee y$	$(x \overline{\wedge} x) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} y)$
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1

Na osnovu jednakosti poslednje dve kolone se vidi da se funkcija (operacija) $\vee$ može izraziti samo pomoću operacije $\overline{\wedge}$ tj. $x \vee y =$

$(x\overline{\wedge}x)\overline{\wedge}(y\overline{\wedge}y)$, odnosno $x+y=(x\uparrow x)\uparrow(y\uparrow y)$. Na osnovu jednakosti kolona ispod $\neg x$ i $x\overline{\wedge}x$ sledi da se i $\neg$ može izraziti samo pomoću operacije $\overline{\wedge}$. I sada je očevidno da kako je $\{\neg, \vee\}=\{', +\}$ baza, to je i $\{\overline{\wedge}\}=\{\uparrow\}$ jednočlana baza skupa svih Bulovih funkcija dvoelementne Bulove algebre. Analogno se dokazuje i za $\{\overline{\vee}\}$.

Definicija 0.50 *Bulova funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ implicira Bulovu funkciju $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako i samo ako je*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za sve vrednosti nezavisno promenjljivih iz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skupa B. Tada se kaže da je f implikanta za g.

Zbog zakona ograničenosti $1+x=1$, sledi da f impicira g akko za sve vrednosti promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za koje f ima vrednost 1 sledi da i g ima vrednost 1.

Definicija 0.51 *Bulov izraz $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ implicir bulov izraz $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako i samo ako funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koju odredјje Bulov izraz A implicira funkciju $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koju određuje Bulov izraz B. Tada se kaže da je A implikanta za B.*

Kako je DNF disjunkcija elementarnih konjunkcija, sledi da zbog apsorcije svaka ta elementarna konjunkcija implicira tu DNF. Na primer elementarna konjunkcija $C=x'yz$ implicira disjunktivnu normalnu formu $D=xyz'+x'y'z+x'yz+x'y'z'$ tj. $C=x'yz$ je implikanta za $D=xyz'+x'y'z+x'yz+x'y'z'$. Sada ćemo dati definiciju kada implikanta $C=x'yz$ jeste prosta implikanta za $D=xyz'+x'y'z+x'yz+x'y'z'$, odnosno za Bulovu funkciju koju D određuje.

Definicija 0.52 *Elementarna konjunkcija C_1 je uključena u elementarnu knjunkciju C akko je skup monoma od C_1 podskup skupa monoma od C.*

Definicija 0.53 *Elementarna konjunkcija C je prosta implikanta Bulove funkcije f akko C implicira f i ako ne postoji elementarna konjunkcija uključena u C koja je različita od C i koja implicira f.*

Znači prosta implikanta Bulove funkcije f je elementarna konjunkcija sa najmanje monoma koja implicira tu Bulovu funkciju f.

Ovde ćemo često poistovećivati Bulov izraz sa funkcijom koju on određuje ali ipak treba imati na umu da to nije isto jer beskonačno mnogo različitih Bulovih izraza može da određuje istu Bulovu funkciju.

Kako se svaka Bulova funkcija može predstaviti sa DNF, to sledi da definicija proste implikante za Bulovu funkciju jeste isto što i prosta implikanta za DNF koja predstavlja (određuje) tu funkciju.

Da bi smo da li definiciju minimalne disjunktivne normalne forme, u oznaci MDNF, moramo prvo dati definiciju kada se za $DNF \quad \Phi_1$ kaže da je prostija od $DNF \quad \Phi_2$.

Definicija 0.54 *$DNF \quad \Phi_1$ je prostija od $DNF \quad \Phi_2$ akko je broj monoma od Φ_1 manji ili jednak od broja monoma od Φ_2 i ako je broj elementrnih konjunkcija od Φ_1 manji ili jednak od broja elementrnih konjunkcija od Φ_2, gde je bar jedna od pomenutih nejednakosti striktna odnosno $<$.*

Definicija 0.55 *DNF Bulove funkcije f je minimalna akko ne postoji prostija od nje koja određuje istu tu Bulovu funkciju.*

Teorema 0.56 *Svaka elementarna konjunkcija minimalne disjunktivne normalne forme (u daljem tekstu $MDNF$) jeste prosta implikanta te MDNF odnosno Bulove funkcije koju određuje ta $MDNF$.*

Dokaz: Neka je $\Phi \quad MDNF$ Bulove funkcije f i neka je $\Phi = C + D$, gde je C proizvoljna elementarna konjunkcija od Φ, a D je disjunkcija (zbir) svih preostalih elementarnih konjunkcija. Sve jednakosti Bulovih izraza koje će slediti, su u smislu jednakosti funkcija koje one određuju, pa je onda jasno da je u tom smislu i $\Phi = f$. Jasno je da C jeste implikanta za Φ tj. za f. Dokazaćemo da je C prosta implikanta za f. Dokaz izvodimo kontradikcijom. Predpostavimo da C nije prosta implikanta tj. da postoji elementarna konjunkcija C_1 takva da je skup monoma od C_1 podskup skupa monoma od C, $C_1 \neq C$ i C_1 implicira f. Znači faktički smo predpostavili da je

$$C = C_1 C^*, \qquad C_1 \neq C \qquad C_1 + f = f.$$

Primetimo prvo da je $C_1 + C = C_1 + C_1 C^* = C_1$ (apsorcija). Kako je znači $C_1 = C_1 + C$ to dalje sledi

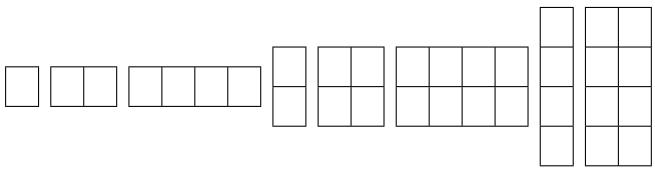
$$C_1 + D = C_1 + C + D = C_1 + \Phi = C_1 + f = f.$$

Kako smo dobili da je $C_1 + D = f$ to znači da $C_1 + D$ je disjunktivna normala forma za funkcije f koja je prostija od $C + D$ (skup monoma od C_1 je podskup skupa monoma od C i $C_1 \neq C$) što je kontradikcija sa činjenicom da je $C + D$ minimalana disjunktivna normalna forma.

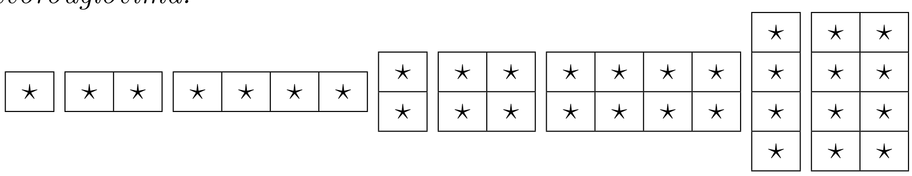
Ova teorema je vrlo značajna jer ukazuje na postupak kako doći do $MDNF$ za neku Bulovu funkciju f tj. treba pronaći sve proste implikante te Bulove funkcije f i od njih odabrati što je moguće manji broj tako da njihova disjunkcija bude DNF koja određuje baš tu Bulovu funkciju f.

Sada ćemo pokazati postupak za pronalaženje prostih implikanti neke Bulove funkcije pomoću Karnoovih tablica, samo za funkcije od dve, tri i četiri nezavisno promenljive. U tu svrhu evo nekoliko definicija.

Definicija 0.57 *Sledeće četvorouglove zvaćemo osnovnim četvorouglovima:*



Definicija 0.58 *Sledeće četvorouglove zvaćemo osnovnim obeleženim četvorouglovima:*



Za svaku Bulovu funkciju $f(x, y, z, u)$ popunjavamo tablicu

	x	x	x'	x'	
z					u
z					u'
z'					u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

tako što ćemo za svaku elementarnu konjunkciju $SDNF$-me te bulove funkcije f, obeležiti njoj odgovarajući kvadratić u tabeli sa simbolm

$\star$. Na primer za funkciju

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f(x,y,z,u)	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1

$SDNF$ je $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'z'u' + x'yzu + x'yz'u + x'y'zu + x'y'z'u + x'y'z'u'$ i posle obeležavanja odgovarajućih polja dobijamo tabelu:

	x	x	x'	x'	
z	$\star$		$\star$	$\star$	u
z					u'
z'		$\star$	$\star$		u'
z'	$\star$		$\star$	$\star$	u
	y	y'	y'	y	

Zamislimo da je ova tabela od $4 \times 4 = 16$ kvadratića nacrtana na elastičnom papiru koji se može istezati i savijati. Prvo taj papir isteglimo levo i desno pa ga savijemo u omotač cilindra, a zatim taj cilindar isteglimo u pravcu njegove ose simetrije, savijemo i sastavimo u oblik torusa (automobilske gume). Sada iz spoljašnosti toga torusa posmatramo slike na njemu i tražimo maksimalne osnovne obeležene četvorouglove.

Maksimalni obeleženi osnovni četvorougao je takav osnovni obeleženi četvorougao koji se ne sadrži ni u jednom drugom osnovnom obeleženom četvorouglu.

I sada svakom maksimalnom osnovnom obeleženom četvorouglu jednoznačno odgovara jedna prosta implikanta.

Četiri obeležena polja u uglovima čine jedan maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array}$ kome odgovara prosta implikanta yu.

Četiri obeležena polja u preseku prve i četvrte vrste sa poslednje dve kolone čine maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \star & \star \\ \hline \end{array}$

kome odgovara prosta implikanta $x'u$.

Dva obeležena polja u preseku treće vrste sa drugom i trećom kolonom čine maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\boxed{\star \mid \star}$ kome odgovara prosta implikanta $y'z'u'$.

I na kraju dva obeležena polja u preseku treće kolone sa poslednje dve vrste čine maksimalni osnovni obeleženi četvorougao $\begin{array}{|c|}\hline \star \\ \hline \star \\ \hline\end{array}$ kome odgovara prosta implikanta $x'y'z'$.

Naravno sve posmatramo na površini torusa pa zbog toga ona četiri obeležena polja u uglovima tabele na površini torusa se vide kao $\begin{array}{|c|c|}\hline \star & \star \\ \hline \star & \star \\ \hline\end{array}$

Kako u ovom primeru postoje samo 4 maksimalna osnovna obeležena četvorougla, to postoje tačno 4 proste implikante Bulove funkcije f ito su $yu, x'u, y'z'u', x'y'z'$.

$MDNF$ sada dobijamo tako što uzmemo minimalni broj maksimalnih osnovnih obeleženih četvorouglova (prostih implikanti) tako da je sa njima prepokriveno svako obeleženo polje (bar sa jednim od njih). Disjunkcija ti prostih implikanti je tražena $MDNF$, tj. u ovom primeru biće samo jedna i to $yu + x'u + y'z'u'$.

Zadatak 0.59 *Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije f definisane sa tabelom:*

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1

Rešenje: $SDNF$ je
$xy'zu + xy'zu' + xy'z'u' + x'yzu + x'yz'u + x'y'zu' + x'y'z'u + x'y'z'u'$.
Sve proste implikante funkcije f su: $y'u', xy'z, x'yu, x'y'z', x'z'u$.
$MDNF : y'u' + xy'z + x'yu + x'y'z'$ i $y'u' + xy'z + x'yu + x'z'u$.

	x	x	x'	x'	
z		$\star$		$\star$	u
z		$\star$	$\star$		u'
z'		$\star$	$\star$		u'
z'			$\star$	$\star$	u
	y	y'	y'	y	

Iz prethodna dva primera vidimo da broj minimalnih disjunktivnih normalnih formi ($MDNF$) za neku Bulovu funkciju f može bi ti 1 ili 2. Očevidno taj broj može biti i veći.

Bulovi izrazi i Bulove funkcije su veoma značajni jer imaju velike primene u drugim naukama kao naprimer i u elektrotehnici, jer se svako prekidačko kolo može interpretirati sa Bulovim izrazom tako što paralelnu vezu dve grane x i y predstavlja $x \vee y$, rednu (serijsku) vezu predstavlja $x \wedge y$ i $\neg x$ znači da ako je prekidač x zatvoren, onda je prekidač $\neg x$ otvoren i obratno.

Ilustrujmo na jednom primeru primenu Bulovih funkcija.

Primer 0.60 *Konstruisati električno kolo u kojem ima jedna (ili više) sijalica i tri nezavisna prekidača, tako da ako tačno jedan prekidač promeni stanje, onda i sijalica promeni stanje.*

Jasno je da prekidač ima dva stanja 0 ili 1, a sijalica takođe dva stanja 0 ili 1 (ugašena ili upaljena). Takođe je jasno da ako tačno dva prekidača promene stanje, tada sijalica ne promeni stanje i ako tačno tri prekidača promene stanje, tada i sijalica promeni stanje. Neka su x, y, x promenljive koje su oznake za ta tri prekidača, a $f(x, y, z)$ neka je oznaka za sijalicu. Zadatak je znači konstruisati (odrediti, napisati, napraviti) Bulovu funkciju koja ima osobinu da ako tačno jedna promenljiva promeni vrednost, tada i funkcija promeni vrednost, ako tačno dve promenljive promene vrednost, tada funkcija ne promeni vrednost i ako sve tri promenljive promene vrednost, tada funkcija promeni vrednost.

Da bi smo napisali tablicu te funkcije f poželjno bi bilo da uređene trojke iz skupa $\{0, 1\}^3 =$
$= \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ napišemo tačno jednu ispod druge u osam vrsta i tri kolone, tako da svake dve susedne uređene trojke se razlikuju na tačno jednom mestu. To se može dobiti naprimer obilaskom svih temena kocke (kroz svako teme tačno jedanput) krećući se neprekidno po ivicama te kocke i upisivanjem koordinata svakoga temena kocke kroz koje prođemo, gde je to kocka čija temena $ABCDA_1B_1C_1D_1$ imaju za koordinate redom $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)$. U teoriji Grafova to se zove Hamiltonov put, tj. put koji prolazi kroz svaki čvor grafa tačno jedanput. Ako krenemo od temena $A(0, 0, 0)$,

tada će to biti put $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Tada u četvrtoj koloni napišemo naizmenično $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1$ i dobićemo tabelu tražene funkcije:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0
0	0	1	1

Sada je očevidno da ova Bulova funkcija zadovoljava tražene uslove, pa je time kreativni deo posla završen. $SDNF$ te Bulove funkcije je $f(x, y, z) = xy'z' + x'yz' + xyz + x'y'z$. Iz Karnoove tabele

	x	x	x'	x'
z	$\star$		$\star$	
z'		$\star$		$\star$
	y	y'	y'	y

sledi da ova $SDNF$ je i minimalna, pa sad možemo nacrtati električno kolo koje je traženo u zadatku:

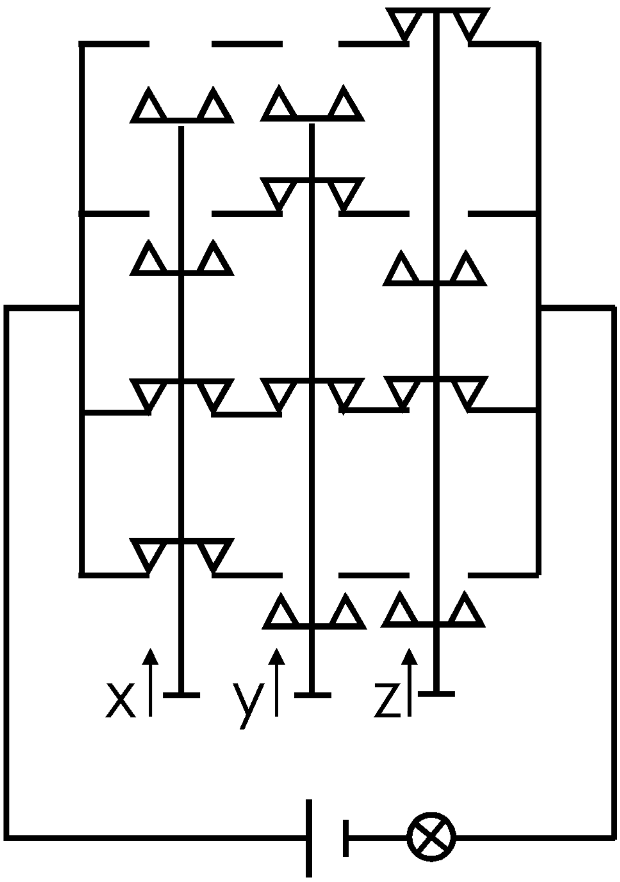


Figure 3: