"Настава математике није наука.
Она је уметност"
Ђерђ Поја - "Математичко откриће"

1. УВОД

Зашто су краљевићи и царевићи од античких па до наших времена имали своје приватне учитеље математике? Зашто су највећи математичари у историји цивилизације били наставници математике касније значајним личностима својих епоха? Зашто данас родитељи, чак и најбољим ђацима, обезбеђују додатне часове математике? Зашто анализе успеха и врхунских резултата ученика на математичким такмичењима, скоро по правилу, указују на велики самостални рад ученика?

Заједнички садржалац свих наведених (ин)директно постављених питања је: да ли је и зашто је индивидуална настава математике најефикаснији облик наставног рада?

1.1. ЗАШТО ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЈА НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ?

Не треба бити много упућен у проблеме математичког образовања да би се закључило да не постоји универзалан наставни програм математике који може занемарити индивидуалне разлике које постоје у способностима ученика уопште, а посебно када су у питању способности за изучавање математичких садржаја.

Јасно је да ако су наставни садржаји математике дати у сасвим елементарној форми и ако су наставни захтеви на истом нивоу, онда су просечни и надпросечни ученици драстично оштећени, јер ће њихове способности остати нереализоване, а њихова мотивација ће бити скоро равна нули.

Ако се пак наставни садржаји и настава математике прилагоде просечном ученику онда опет имамо два проблема, пошто ће тако конципирана настава бити презахтевна за слабије ученике и недовољно ангажована за боље ученике. То ће опет резултирати падом мотивације код обе групе ученика, јер ће једни бити демотивисани превисоким нивоом садржаја, а други недовољном амбициозношћу наставних захтева.

Најнеприхватљивије је ипак, ако се настава усмери само ка даровитим ученицима, јер ће тада најбројнија ученичка популација бити без услова да активно прати наставна збивања. И мотивација ученика је тада опадајућа функција која стрмоглаво из проблема у проблем тежи нули из простог разлога што ће неразумевање наставних садржаја бити све веће и веће.

Како изложене проблеме решити?

Једно од најбољих решења описаних ситуација је индивидуализација наставе математике, тј. омогућавање сваком ученику да до максимума реализује своје интелектуалне и математичке способности. Индивидуализирана настава[1] је најефикаснији облик наставе, јер је то облик наставе који у потпуности уважава и прати ученикове способности и темпо којим ученик овладава предвиђеним наставним садржајима.

Иако је одговор на постављено питање био доста једноставан, реализација индивидуализиране наставе математике није ни мало лак посао.

1.2. ЦИЉЕВИ ОВОГ РАДА

Циљ овог рада је да изложи основне дидактичке карактеристике идвидуализиране наставе и полазећи од њих конституише и илуструје могуће дидактичке моделе који су могу применити у индивидуализираном раду са ученицима од редовне наставе математике, до разноврсних облика рада у оквиру додатне наставе и ваннаставних активности, као и у самосталном раду са ученицима.

Дакле, циљ нам је да на разним примерима прикажемо богатство идеја које стоје на располагању реализаторима приликом индивидуализације наставе математике у старијим разредима основне школе. Зато овај рад не треба схватити као скуп дидактичко-методичких рецепата (модела) које ће безрезервно прихватити наставници практичари (будући корисници овог рада), већ као само једно виђење могућег наставног приступа у реализацији неких циљева и исхода наставе математике.

Изложени методички модели ће бити груписани у неколико целина, а класификација целина је учињена према врстама наставе у којима се користи дати методички модел. То значи да ће у овом делу рада бити учињен напор да се за неке од циљева и исхода пронађе најадекватнији дидактичко-методички материјал који ће најбоље илустровати примену анализираних начина индивидуализације, при чему је евидентно да ће се садржаји појединих модела делимично преклапати.

Свакако најјважнији циљ овога рада је да наставнике охрабри и подстакне у примени индивудуализираног облика рада у наставној пракси, јер је сигурно да и припрема и реализација индивидулизоване наставе математике од наставника траже и више времена и више напора него класична настава.

Верујемо да ће резултати постигнути таквим радом бити највећа награда за труд и ентузијазам уложен у конципирање индивидуализоване наставе, али и да ће се у перспективи наћи начини да мотивација наставника не остане само у духовној сфери, већ да ће се конституисати механизми и за материјалну стимулацију оних који желе да иновирају, интензивирају и организују ефикаснију наставу.

[1] Индивидуализирана и индивидуална настава нису исто, јер се код индивидуалне наставе процес учења одвија искључиво на релацији ученик – наставник, а код индивидуализиране наставе наставник конципира наставни процес тако да сваки ученик у одељењу практично има индивидуалан рад

2. ИНДИВИДУАЛИЗИРАНА НАСТАВА

2.1. ОСНОВНЕ ПОСТАВКЕ ИНДИВИДУАЛИЗИРАНЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Индивидуални облик наставног рада представља појединачни рад ученика, било да он ради у на неком посебном задатку или да његов рад улази у оквир неког општег рада (домаћи задатак, контролна вежба, писмени задатак, тест, ...). Овај облик наставног рада настао је из потребе уважавања индивидуалних разлика у способностима, ритму и темпу рада појединих ученика. Индивидуализирани облик наставе математике подразумева стални интензивни и активни однос ученик – наставник у коме наставник прати индивидуално напредовање ученика практично из проблема у проблем.

Зато се индивидуализација наставе математике најчешће везује за интерактивну наставу. Интерактивна настава се заснива на сталној комуникацији између ученика и наставника и представља један од најактивнијих и најхуманијих методичких захвата у наставном раду. Интерактивно учење разбија све комуникацијске баријере, омекшава традиционални однос ученик-наставник, изграђује поверење и успоставља сараднички однос између ученика и наставника.

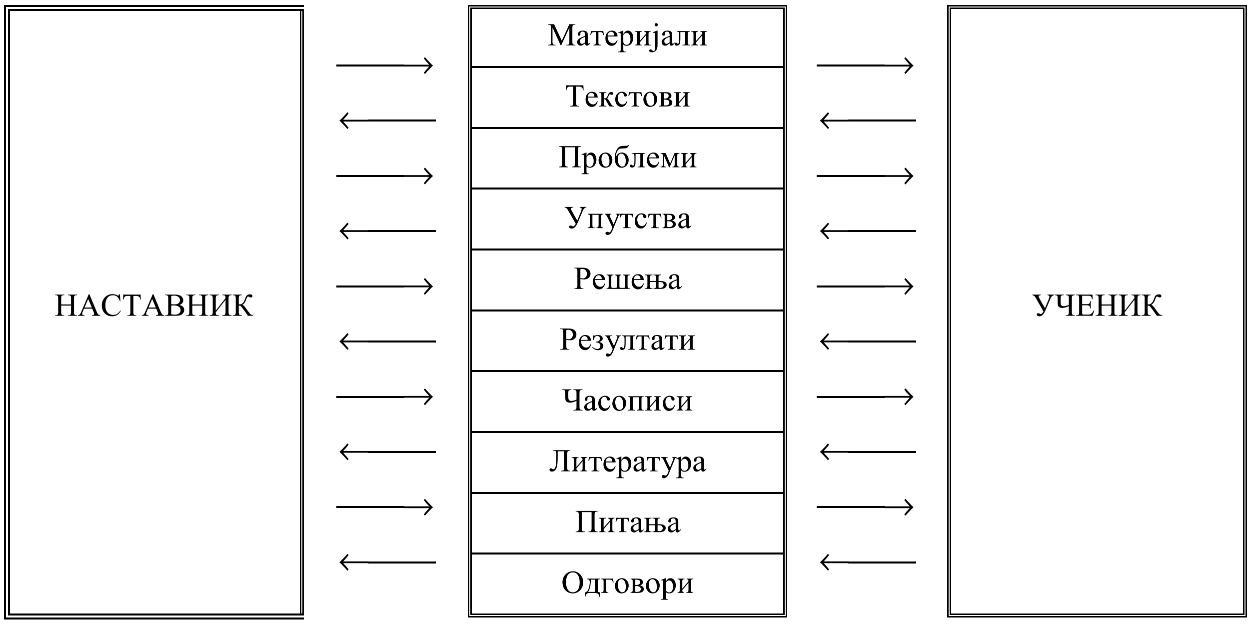
Интеракција ученик – наставник подразумева не само разбијање једног односа који почива на ауторитету наставника по дефиницији, већ и превазилажење свих недостатака разредно-часовног система. Ученик и наставник се не виђају и не комуницирају само у току часова редовне или додатне наставе, већ и у другим приликама, кад год се за то укаже потреба. Уз то комуникација је разновсна: директна, преко писаних материјала (задаци, упутства, решења, текстови, часописи, збирке задатака и литература уопште...), телефонска комуникација, комуникација путем електронске поште ...

У интерактивном учењу се повећава активност и ученика и наставника. А наставник није више у позицији да само преноси знања и тражи одговоре. Ученици траже нове и нове проблеме којима ће се бавити, али и одговоре на оно што њих интересује: коришћене формулације, решења проблема које нису успели да реше; теоријске основе које нису успели да до краја разјасне... Наставник добија шансу да пласира и провери идеје које доприносе и продубљивању и проширивању садржаја.

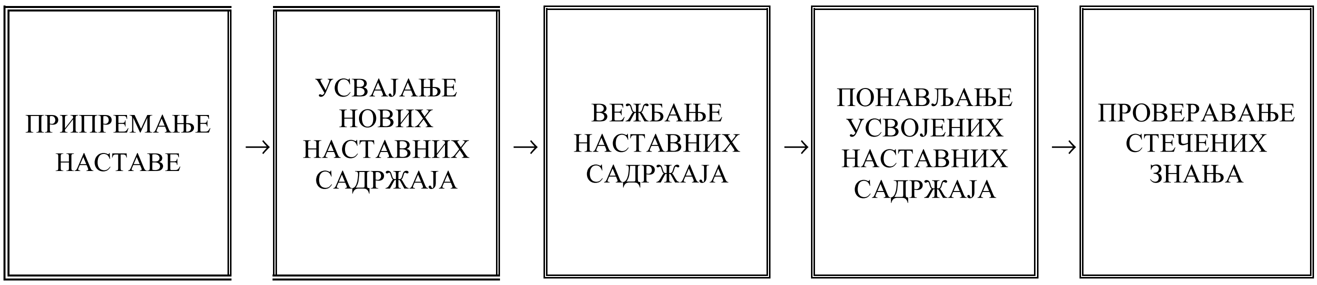
Организационо гледано интерактивно учење се одвија у континуитету и сталном повратном дејству, са увећаном стваралачком продукцијом и ученика и наставника.

Међутим, данашњи развој технологије, нарочито у сфери коришћења Интернета пружа велике могућности за интерактивно учење, јер ученик и наставник могу комуницирати скоро свакодневно коришћењем електронске поште, чиме комуникација добија на фреквентности, динамици, а наравно и на квалитету. .

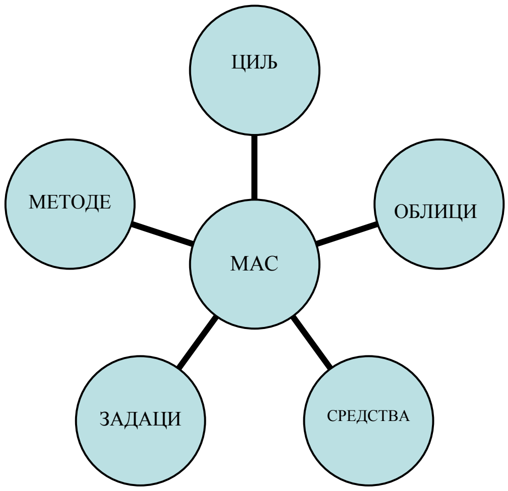
Интерактивно учење се у смислу претходно изнетих карактеристика може приказати следећом схемом:



Настава се планира и реализује по макро-структурном моделу који је карактеристичан за сваки наставни систем [2], а чине га осмишљена активност на програмирању припремања, усвајања нових наставних садржаја, увежбавања, понављања и проверавања, при чему наредна активност логично проистиче из претходне.



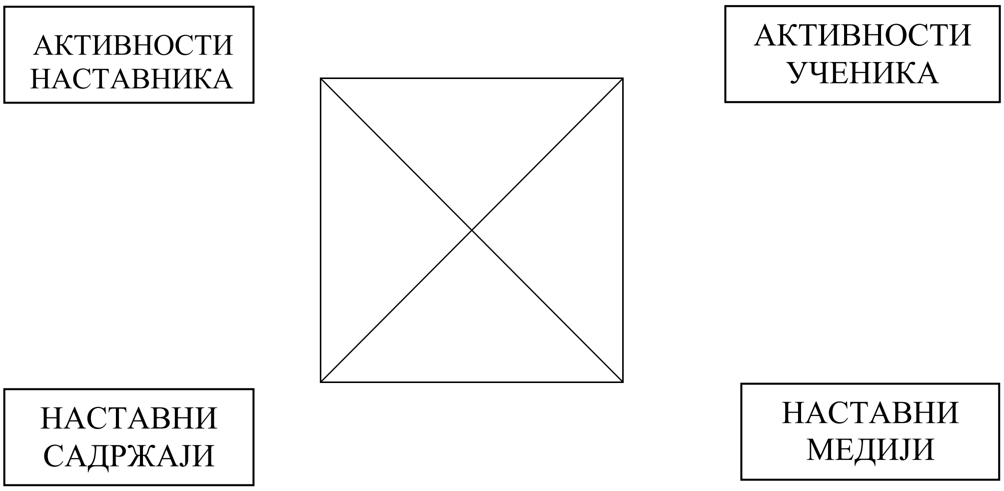
Свака од претходно наведених макро-структурних наставних активности брижљиво је планирана коришћењем микро-стуктурног модела, што значи да је свака од наставних активности прецизно дефинисана по циљу, задацима, методама, средствима и облицима рада.



[2] Видети: [8.] Ђукић, Мара: Дидактички чиниоци идивидуализоване наставе – Нови Сад, 1995. - стр. 76.

И макро и микро структура подлежу детаљној анализи у оквиру дидактичког четворороугла (видети наредну схему) кога чине четири основна фактора сваке квалитетне наставе: активности наставника, активности ученика, наставни садржаји и медији.[3]

Елементи дидактичког четвороугла нису случајно повезани свим могућим везама, јер само добра корелација између свих елемената система даје оптималне наставне ефекте. Зато планирање и програмирање наставе није могуће без узимања у обзир међусобних узрочно-последичних веза између свих елемената система и зато интерактивна настава има велике шансе за успех само ако је оствaрена максималну синхронизација унутар свих елемената система.



Наставни модел интерактивне наставе подразумева детаљну разраду сваког од задатих елемената модела. Дакле дефинисање сваког од основних фактора наставе по свакој од макро-структурних активности и сваком од микро-структурних елемената. То значи да се у припремању наставног процеса врши четворослојна припрема, јер се активности ученика и наставника и наставни садржаји и медији анализирају у оквиру датих микро и макро компоненти по следећој схеми:

	ПРИПРЕ-МАЊЕ	УСВАЈАЊЕ НОВИХ САДРЖАЈА	ВЕЖБАЊЕ	ОБНАВЉА-ЊЕ	ПРОВЕРА-ВАЊЕ
ЦИЉ					
ЗАДАЦИ					
МЕТОДЕ					
СРЕДСТВА					
ОБЛИЦИ					

3 Видети: [8.] Ђукић, Мара: Дидактички чиниоци идивидуализоване наставе – Нови Сад, 1995. - стр. 99.

Остаје да у оквиру датог дидактичког модела направимо компаративну анализу која показује предности и мане фронталног, групног и индивидуализираног облика рада у настави математике, при чему се код групног рада анализа односи на рад у хомогеним групама:

	ФРОНТАЛНА НАСТАВА	ГРУПНИ РАД	ИНДИВИДУАЛИЗИРАНА НАСТАВА
АКТИВНОСТИ НАСТАВНИКА	• Ангажује наставника као предавача или • Организатора дијалога са ученицима	• Ангажује наставника у већој мери • Наставник није само предавач и дијалог мајстор • Наставник постаје координатор активности група	• Максимално ангажује наставника • Наставник је и предавач и координатор • Наставник је и аутор индивидуалних медија
АКТИВНОСТИ УЧЕНИКА	• Недовољне • Сведене на активност само појединих ученика	• Приличне • Могуће разлике у нивоу ангажовања у групи	• Оптималне • Омогућују максимално ангажовање ученика
НАСТАВНИ САДРЖАЈИ	• Прилагођени само једном делу ученика • За остале ученике или прелаки или претешки	• Делимично прилагођени могућностима ученика • Омогућују квалитетно напредовање ученика	• Прилагођени могућностима свих ученика • Омогућују благо проширивање и продубљивање знања
НАСТАВНИ МЕДИЈИ	• Конструисани униформно	• Конструисани по моделу благе диференцираности	• Конструисани оптимално диференцирано

Из горње табеле се види да је индивидуализирана настава најзахтевнији облик наставног рада, али и најефикаснији, јер не оставља могућност празног хода наставнику, али је при том и ангажовање сваког ученика максимално. Наравно и при оваквог раду наставник ће највише бити ангажован око ученика који имају највише проблема у савладавању наставних садржаја, али то при индивидуализираном раду неће имати последице на друге ученике, јер ће они имати довољно времена, простора и дидактичког материјала за индивидуално напредовање.

1.3. ДА ЛИ ЈЕ НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ ПОГОДНА ЗА ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЈУ?

Настава математике је веома погодна за индивидуализацију, јер у суштини највећа активност ученика у настави математике почиње тек када се крене на увежбавање садржаја и решавање проблема. Зато је учење решавањем проблема (проблемска настава) методички модел који се најчешће примењује у индивидуалном раду.

Решавање проблема је процес који у највећој мери активира све интелектуалне потенцијале ученика. То је процес који обезбеђује примену свих стечених знања и метода и њихову синтезу у логичан низ чињеница које из датих услова изводе потребне закључке и корак по корак воде ка добијању крајњег решења.

Теоретичари решавања математичких проблема[4] разликују две врсте математичких проблема: конструктивни проблеми и проблеми доказивања. Решавање конструтруктивних задатака подразумева конструкцију новог математичког објекта (геометријска фигура или тело, скуп бројева, низ, формула ...) или израчунавање неких његових битних карактеристика (обим, површина, запремина, елементи скупа, ...) који задовољавају све постављене услове. Решавање доказних задатака је поступак којим се из датих услова који важе за један или више математичких објеката, коришћењем одређених логичких и математичких правила доказује неко ново својство или однос датих математичких творевина.

Напоменимо и да су у настави математике у старијим разредима основне школе нешто фреквентнији конструктивни задаци, али да се почев од VI разреда често примењују и доказни задаци у мери и са строгошћу примереној узрасту, психолошким и интелектуалним карактеристикама ученика.

Чувени амерички математичар (мађарског порекла) Ђерђ Поја у својој популарно написаној књизи "Како ћу решити математички задатак?"[5] даје и на примерима објашњава један врло употребљив општи алгоритам за решавање математичких проблема. То је поступак који треба да буде увек на уму сваком ученику и зато је у наставном раду неопходно да се добро илуструје поменути алгоритам. Наравно, неће сам алгоритам решити ниједан математички проблем, али може много помоћи да се његовим коришћењем издиференцирају фазе у решавању и корак по корак дати проблем трансформише у облик из кога се далеко лакше добијају тражена решења и изводе потребне анализе.

Алгоритам за решавање математичких проблема који предлаже Ђерђ Поја дат је у следећој табели којом се аутор алгоритма обраћа ученицима:

<table>
<tr><td>ПРВО</td><td>РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА</td></tr>
<tr><td rowspan="4">ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК</td><td>▪ Шта је непознато?
▪ Шта је задато?
▪ Како гласи услов?</td></tr>
<tr><td>▪ Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је преодређен? Или контрадикторан?</td></tr>
<tr><td>▪ Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!</td></tr>
<tr><td>▪ Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?</td></tr>
<tr><td>ДРУГО</td><td>ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!</td><td>▪ Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?</td></tr>
<tr><td>▪ Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи?</td></tr>
<tr><td>▪ Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!</td></tr>
</table>

4 Видети књигу [13 .] Джордж Пойа - Математическое открытие – "Наука" – Москва ,1976.

5 Видети књигу [14.] Ђерђ Поја: Како ћу решити математички задатак? – "Школска књига" - Загреб, 1966.

АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.	▪ Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га употребити? Можеш ли применити његов резултат? Можеш ли применити методу којом је тај задатак решен? Да ли можеш да уведеш неки помоћни елемент који би ти олакшао употребу тог задатка?
	▪ Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције!
НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак! Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; када је непозната тако одређена како се може мењати? Да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који ти могу помоћи у одређивању непознате? Можеш ли да промениш непознату, или дате податке, или ако треба и једно и друго тако да нова непозната и нови подаци буду међусобно ближи?
	▪ Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Да ли си узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?
ТРЕЋЕ	ПРИМЕНА ПЛАНА
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! ▪ Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ▪ Можеш ли доказати да је исправан?
ЧЕТВРТО	ПРОВЕРА
ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Можеш ли проверити резултат? ▪ Можеш ли проверити доказ?
	▪ Можеш ли резултат извести другачије? ▪ Можеш ли га уочити на први поглед?
	▪ Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?

<u>ПРИМЕР 1.</u> Одредити непознате цифре a и b тако да број $\overline{2009ab}$ буде дељив са 12.

ПРВО	**РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА**
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	▪ У траженом шестоцифреном броју непознате су цифре a и b
	▪ Дате су прве четири цифре 2, 0, 0 и 9
	▪ Услов је да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12
	▪ Услов је могуће задовољити, јер је, на пример, број 200916 дељив са 12, али дељив и са 36.
	▪ Услов да је број $2009ab$ дељив са 12 је довољан за одређивање решења
	▪ Услов није контрадикторан.

ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	▪ Чини се да проблем има више решења, јер је сваки дванаести број дељив са 12 ▪ Слика ми није потребна ▪ Дати услов садржи два подуслова: да би добијени број био дељив са 12 мора бити дељив са 3 и са 4 ▪ То значи да збир цифара добијеног броја мора бити дељив са 3 ▪ Али и да двоцифрени завршетак *ab* мора бити дељив са 4
ДРУГО	**ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА**
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ! АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ. НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Имам две идеје ▪ Прва је: Одредићу најмањи број 2009*ab* који је дељив са 12, а остале ћу добити додавањем броја 12 на претходни број, јер је сваки дванаести број дељив са 12 ▪ Друга је да одредим збир цифара траженог броја 2009*ab,* а он је $11 + a + b$ и да издвојим све комбинације a и b које задовољавају два постављена услова, тј. да је $11 + a + b$ дељиво са 3 и да је двоцифрени завршетак *ab* дељив са 4. ▪ За прву идеју план је јасан - треба одредити најмањи број ▪ За другу идеју план се састоји у додавању на 11 збирова $a + b$ који омогућују дељивост са 3. Дакле, $a + b$ може бити 1, 4, 7, 10, 13 и 16, јер $a + b$ не може бити веће од 18.
ТРЕЋЕ	**ПРИМЕНА ПЛАНА**
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Прва идеја: Најмањи тражени број је 200904, јер број 200900 није дељиви са 3, а број 200902 није дељив са 4. ▪ Сви тражени бројеви су тада 200904, 200916, 200928, 200940, 200952, 200964, 200976, 200988 ▪ Друга идеја: Ако је $a + b = 1$ могући су бројеви 200901 или 200910, а решења нема јер ни један од бројева није дељив са 12. ▪ Ако је $a + b = 4$ могући су бројеви 200904, 200913, 200922, 200931, 200940, а решења су 200904 и 200940, јер остали бројеви нису дељиви са 4. ▪ Ако је $a + b = 7$ могући су бројеви 200907, 200916, 200925, 200934, 200943, 200952, 200961 и 200970, а решења су 200916 и 200952, јер остали бројеви нису дељиви са 4. ▪ Ако је $a + b = 10$ могући су бројеви 200919, 200928, 200937, 200946, 200955, 200964, 200973, 200982, 200991, а решења су 200928 и 200964, јер остали бројеви нису дељиви са 4. ▪ Ако је $a + b = 13$ могући су бројеви 200949, 200958, 200967, 200976, 200985, 200994, а решење је само број 200976, јер остали бројеви нису дељиви са 4. ▪ Ако је $a + b = 16$ могући су бројеви 200879, 200988, 200997, а једино решење је 200988, јер остали бројеви нису дељиви са 4.
ЧЕТВРТО	**ПРОВЕРА**
ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Упоређивањем решења добијених првом и другом идејом јасно је да су добијена решења једина решења ▪ Решење је добијено на два начина, а сигурно је и да постоје друге могућности. ▪ На пример од свих бројева чији је двоцифрени завршетак дељив са 4 елиминисати оне који нису дељиви са 3 ▪ Или одредити остатак при дељењу броја 200900 са 12 и на основу тога одредити најмањи број. ▪ Дати поступак се може употребити и код проблема који имају сличну формулацију. На пример: ▪ Одредити све бројеве облика $\overline{2009ab}$ који су дељиви са 15. ▪ Одредити цифре a и b такве да је збир бројева 1234*a* и 9876*b* дељив са 12

Како изгледа примена предложеног алгоритма на решавање појединачних проблема илустровано је на претходном примеру, уз напомену да сличне фазе реализације има и проблемска настава, која се се одвија кроз неколико обавезних фаза:

1. Стварање проблемске ситуације;
2. Формулисање хипотеза;
3. Декомпозиција проблема;
4. Решавање проблема;
5. Анализа резултата;
6. Практична примена.

Примену проблемске наставе у настави математике могуће је практично илустровати многим примерима, јер је цела настава математике уствари решавање проблема. Индивидуализација се врши погодним избором проблема, тј. диференцијацијом проблема зависно од нивоа математичких спообности ученика и брзине којом ученици могу решавати задате проблеме.

*

На крају овог поглавља, неколико речи и о неким заблудама везаним за индивидуализирани облик рада.

Индивидуализирану наставу као облик рада не треба поистовећивати са додатном наставом, јер она то није, иако је индивидуални облик најчешће примењиван облик рада у додатној настави. Међутим, индивидуализирани облик рада се примењује и у допунској настави и представља једнако ефикасан систем рада и са ученицима скромнијих и са ученицима изузетних математичких способности.

Треба нагласити и да између самих термина индивидуални рад и индивидуализована настава не стоји знак једнакости, јер индивидуалан рад је везан за ученике, а индивидуалиацију наставе врши наставник.

Следећа заблуда је везана за глорификацију индивидуализираних облика рада која може бити веома штетна. Просто нема потребе да се превише форсира примена индивидуализираних облика рада, јер нису сви наставни садржаји и нису све врсте наставе једнако погодне за индивидуализацију, нити је индивидуализирана настава свемоћна. Индивидуализирани облик рада може дати ефикасне резултате само ако се правилно и правовремено користи у јединству са другим облицима и методама рада.

Исто тако како је опасна глорификација индивидуализираног облика рада, опасно је и подцењивање, јер је код неких наставних садржаја и неких наставних сизуација права штета све ученике фронтално замарати бесконачним понављањем познатих алгоритама и индивидуализација је прави спас за ученике који су помињани алгоритам већ савладали.

Дакле, треба имати реална очекивања када су у питању исходи индивидуализиране наставе с обзиром на осетљивост периода у коме се налазе ученици старијих разреда основне школе и чињеницу да се највећа емоционалне и интелектулне промене код ученика дешавају управо у том периоду.

ПРИЛОГ 1.

ОБРАЗОВНИ НИВОИ

1. **Ниво препознавања** - најнижи ниво, кад ученик није у стању да самостално искаже тражени податак, правило и сл.; али га се може сетити уз извесну помоћ наставника, или га може препознати у низу понуђених одговора (нпр. у тесту са вишеструким избором одговора).

2. **Ниво репродукције** - мало квалитетно али неопходно знање, када ученик може самостално да репродукује научени садржај у погледу познавања чињеница, термина, правила, класификација, поступака итд.

3. **Ниво разумевања** - квалитетније знање у односу на претходне нивое, када ученик стварно схвата и разуме научени садржај и у стању је да га логички образложи, тј. градиво излаже логично и с разумевањем (ученик је у стању не само да препозна и репродукује научено, већ да врши и мисаону прераду знања - да разуме и објасни чињенице, појмове, правила, дефиниције, да издвоји битно од небитног, повезује чињенице и изводи закључке). Ученик који је научио градиво на овом нивоу може вербално исказани задатак да "преведе" на математички језик (језик симбола), и обрнуто, са више апстрактног (математичког) језика може да "преведе" на мање апстрактан (конкретнији, обичан) језик.

4. **Ниво примене** - врло квалитетно знање, када је ученик у стању да научене садржаје (правила, алгоритме, теореме, методе и сл.) самостално примењује у решавању разних теоријских или практичних задатака, сличних онима који су већ решавани, тј. ученик уме стечено знање да примењује при учењу новог градива, у животу и пракси.

5. **Ниво креативности** или **стваралачког решавања** проблема - најквалитетније знање, када је ученик (сагласно свом узрасту) у стању да стечено знање и познате методе примењује у сасвим новим ситуацијама (нпр. у решавању задатака сасвим нове врсте), да самостално издваја битне идеје и чињенице и проналази одговарајуће поступке за решавање појединих проблема, да стваралачки и самостално реорганизује градиво које излаже, критички анализира и процењује изнете тврдње или "теорије".

3. ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЈА РЕДОВНЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Редовна настава је најзаступљенија врста наставе у нашим школама и зато је најнормалније на првом месту размотрити њену индивидуализацију, јер су ученици и наставници највећи део времена (око 140 наставних часова годишње) ангажовани баш овом врстом наставе. Индивидуализација редовне наставе математике најчешће се реализује кроз:

- Додатне захтеве при фронталном раду
- "Степенасту" индивидуализацију
- Индивидуализацију домаћих и писмених задатака, контролних вежби, тестова ...

3.1. ДОДАТНИ ЗАХТЕВИ ПРИ ФРОНТАЛНОМ РАДУ

Индивидуализација редовне наставе математике најчешће се везује за часове увежбавања, обнављања, систематизације наставних садржаја, јер је врло тешко индивидуалним обликом рада реализовати часове стицања нових знања. Индивидуализација се реализује тако што у оквиру проблема (а) који је фронтално презентиран свим ученицима, поједини ученици добијају у оквиру истог задатка додатне захтеве (b), (c) ... Најбоље је да ти делови имају, али по некад и не морају имати очигледну повезаност... Индивидуализацију наставе преко додатних захтеве при фронталном раду илуструјемо следећим примерима:

ПРИМЕР 2.

Разред:		Први
Наставна јединица:		Линеарне једначине
Тип часа:		Час увежбавања стечених знања
ЗАДАЦИ:		
1.	a)	Решити једначину: $3(x + 2) - 2(1 - x) = 4x + 5$
	b)	Одредити решења једначине: $(x - 2)^2 - (x - 3)(x + 3) = 13 - 4x$.
	c)	Решити једначину: $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 12\,(x^2 - x) - 8$.
2.	a)	Одредити решења једначине: $\frac{5x}{2} = \frac{3x+24}{6}$
	b)	Решити једначину: $y\left(\frac{3y+1}{5} - \frac{2y-7}{3}\right) = 5 - \frac{y+6}{2}$
	c)	Одредити решења једначине: $\frac{6x-5}{2x-4} = \frac{6-7x}{6-3x}$
3.	a)	Решити једначину: $2 + \frac{1}{t-3} = \frac{4-t}{t-3}$
	b)	Одредити решења једначине: $\frac{x}{x-2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{x^2}{4-x^2}$
	c)	Решити једначину: $\frac{2}{y^2-4} + \frac{1}{y^2-4y+4} = \frac{1}{y^2+5y+6}$
4.	a)	Применом формуле $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$ решити једначину: $(x - 1)(2x + 4) = 0$.
	b)	Ако је $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$ решити једначину: $(x - 2)(3x + 1) = (2 - x)(x + 5)$.
	c)	Применом формуле $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$, решити једначину: $x^3 - 3x^2 = 2x - 2x^2$.

5.	a)	Да ли су еквивалентне једначине: $3x + 2 = 2x + 3$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{3x+4}{7}$?
	b)	Да ли су еквивалентне једначине: $x(x - 2) = (x - 1)(x + 1)$ и $\frac{x+3}{x-3} = \frac{x-1}{x+1}$?
	c)	Да ли су еквивалентне једначине: $x^2 - 1 = 0$ и $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x} = \frac{x-1}{x-5}$?

Текстови датих задатака се ученицима презентују помоћу графоскопа или видео бима, при чему се увек презентира цео задатак. На презентацију следећег задатка се прелази тек када неко од ученика тачно реши све делове претходног задатка. Тако се обезбеђује поступност у решавању, без прескакања, које је могуће (а није добро) ако се задаци ученицима презентирају коришћењем наставних листића.

Решења датих проблема се излажу на табли редоследом задавања. Темпо излагања решења задатака је сигурно спорији од темпа решавања, па ће се најчешће десити да се сва решења не презентирају. Међутим, вероватно ће се сви задаци решити. У том случају треба бар дати повратну информацију о тачним решењима. Добра је и пракса да се табла поделити на два дела и да се на једном делу исписују решења задатака (a), а на другом делу решења задатака (b), (c), ... Ти процеси могу да се одвијају истовремено.

Важно питање је селекције ученика који решавају задатке (a), а који и остале делове датих задатака. Овакав начин рада отклања сваку могућност дискриминације, јер једноставно се ником не забрањује да решава било који задатак. Ако реши задатак (a) може да пређе на задатак (b) или (c). Исто тако може да прати и записује сва решења, тј. може да бира какао ће пратити процес увежбавања, што мислимо да је и психолошки и мотивационо јако позитивно.

ВЕЖБА 1.

У наредној табели дати су задаци елементарне сложености, дакле нивоа препознавања, нивоа репродукције или нивоа разумевања. У сваком од датих проблема додати сложеније задатке, дакле задатке нивоа примене или нивоа креативности, који се могу искористити као додатни проблеми намењени индивидуализацији. Избор задатака који се додају може бити, а не мора бити из скупа предложених. Могу се искористити, али не морају сви предложени задаци.

Разред:	Други
Наставна јединица:	Основне особине логаритама
Тип часа:	Час увежбавања стечених знања

ЗАДАЦИ:		
1.	a)	Израчунати $\log_2 256$
	b)	
	c)	

2.	a)	Одредити реалан број a, ако је $\log_a 343 = 3$
	b)	
	c)	
3.	a)	Колико је $3^{\log_3 5}$
	b)	
	c)	
4.	a)	Одредити x, ако је $\log_7 x = \log_7 3 + \log_7 8$
	b)	
	c)	
5.	a)	Израчунати: $\log_{10} 5000 - \log_{10} 5$
	b)	
	c)	

I. Одредити $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

II. Ако је $\log 2 = a$ и $\log 3 = b$, израчунати $\log 648$.

III. Одредити $\log_2 ab$, је $\log_a 16 = 0{,}25$ и $\log_b 0{,}5 = -4$.

IV. Израчинати $\log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2$.

V. Израчунати: $2 \cdot 5^{\log_5 125} + 5 \cdot 3^{\log_3 81}$

VI. Ако је $\log_3 a = b$, израчунати $\log_{27} a^5$.

VII. Израчунати: $\log_8 \log_4 \log_2 16$

VIII. Одредити $\log 2$ и $\log 5$ у функцији од a, ако је $\log 2 \cdot \log 5 = a$.

IX. Израчунати $\log_a \dfrac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$

X. Одредити реалан број a, ако је $\log_a 16 + \log_{a^2} 64 = 7$.

ВЕЖБА 2.

Користећи уџбеничку литературу конструиши сценарио за час индивидуализиране наставе коришћењем додатних захтева при фронталном раду за следеће наставне теме:

1. Алгебарске трансформације полинома (1. разред – час систематизације)
2. Експоненцијална једначина (2. разред – час систематизације)
3. Површина и запремина призме и пирамиде (3. разред – час систематизације)
4. Извод функције (4. разред – час систематизације).

3.2. "СТЕПЕНАСТА" ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЈА

Поступак делимично сличан претходном је такозвана "степенаста" индивидуализација. Наиме процес увежбавања наставних садржаја није ништа друго до "пењање уз степенице" од задатка до задатка који су поређани од лакшег ка тежем, од једноставнијег ка сложенијем ... дакле уз поштовање свих дидактичких принципа. Сваки ученик се пење својим темпом од подножја ка врху. Неки ће стићи до трећине степеница, неки до половине, неки на сам врх, независно од воље наставника, а зависно од усвојених знања и својих математичких способности.

ПРИМЕР 3.

Разред:	Трећи
Наставна јединица:	Аритметички низ
Тип часа:	Час увежбавања стечених знања
ЗАДАЦИ:	
11.	Ако су m и n различити природни бројеви и ако је $S_m = S_n$, онда је $S_{m+n} = 0$. Доказати.
10.	Збир првих n чланова аритметичког низа је $S_n = \frac{n^2 + 7n}{2}$. Одредити a_{33}.
9.	Реални бројеви a, bи c чине аритметички низ. Доказати да тада и бројеви $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ чине аритметички низ. Важи ли обрнуто?
8.	Решити једначину 9 + 11 + 13 + ... + x = 2009.
7.	Између реалних бројева 9x + y и 9y + x, уметнути 7 реалних бројева, тако да се добије девет узастопних чланова аритметичког низа.
6.	Реални бројеви x + 1, 2x + 3 и 6x – 1 су узастопни чланови једног аритметичког низа. Одредити x.
5.	Одредити растући аритметички низ ако је збир прва три члана тог низа 27, а збир њихових квадрата 275.
4.	Израчунати a_{10} и збир првих 20 чланова аритметичког низа, ако је $a_1 + a_5 = 26$ и $a_2 \cdot a_4 = 160$.
3.	Једнакости $a_1 + a_3 = 8$ и $a_5 - a_2 = 9$ одређују један аритметички низ. Одредити a_{10} и S_{11}.
2.	Дат је аритметички низ тако да је $a_5 = 81$ и $d = -3$. Који члан тог низа је једнак 0?
1.	Први члан аритметичког низа је $a_1 = 3$, а разлика $d = 2$. Одедити двадесет пети члан и збир првих тридеет чланова тог аритметичког низа

Поступак презентације задатака, као и презентације њихових решења је слободнији него код претходног примера. То значи да се задаци могу ученицима приказати графоскопом, видео-бимом, али и коришћењем наставних листића.

Табла се може поделити на 10 поља и у поља се редоследом решавања уписују решења задатака. Идеално би било да се задаци решавају поступно, дакле у низу 1, 2, ...10, 11 али се, у изузетним случајевима, ученицима може дати слобода да проблеме решавају и ван уобичајеног поретка., при чему је добро устројити ред један лакши задатак, па један тежи задатак, и тд. Дакле, у том случају ефикасан редослед би био 1 – 6, 2 – 7, 3 – 8, 4 – 9, 5 – 10, ...

И у овом типу индивидуализације нема дискриминације ученика, нити проблема појединачног темпа, јер ће сваки ученик пратити сопствени темпо, при чему је добро да сви почну од првог задатка. Можда се десет задатака чини много за један час, али и брзина решавања проблема је добар индикатор усвојености наставних садржаја. Уосталом, лакши задаци ће бољим ученицима бити добро загревање "кликера" за мисаоне напоре који их очекују при врху степеница.

Од велике важности и код овог и код других типова индивидуализације је обучити ученике наставном поступку и објаснити им да циљ рада на часу није такмичење у решавању датих проблема, већ максимално ангажовање сваког ученика, интензивнија настава и боља искоришћеност времена. Наставник мора бити изузетно сконцентисан и активан, јер мора бити скоро непрекидно у акцији од ученика до ученика и мора пажљиво бирати ученике који излажу своја решења на табли. У том смислу је веома важно да се најбољи ученици не "потроше" на решавање задатака од 1 до 5. У мотивационом смислу ће много значити, ако своја решења тих задатака изложе ученици скромнијих математичких способности.

Иако код "степенасте" индивидуализације и уопште сваке индивидуализације организација часа јесте приличан проблем, далеко већи проблем је сам избор задатака и њихова "степенаста" класификација. Дајемо кратко упутство о једном од могућих приступа диференцирању проблема који се предлажу за индивидуалан рад.

Прва активност наставника усмерена је на избор потенцијалних проблема, а њих мора бити, бар за око 50% више од оних који ће бити решавани на часу.

Други део посла је бар делимично решавање свих проблема, како би наставник имао конкретан утисак о сложености сваког од одабраних задатака.

У трећој фази се врши класификација проблема по образовним нивоима, тј. опредељивање који задатак мери ниво припознавања, ниво репродукције, ниво разумевања, ниво примене, односно ниво креативности. [6]

Четврта фаза је сврсисходна елиминација вишка проблема, што значи да се изостављају проблеми сличног садржаја, односно сличних нивоа захтева.

Последња пета фаза програмирања индивидуализираног рада је конструисање "степенастог" низа задатака. То је креативан посао за који нема правила, али много значи знање и искуство, као и познавање интелектуалних могућности ученика. Битно је да се као финални производ добије низ проблема од којих је сваки за нијансу сложенији од претходног тако да решавање сваког следећег задатка тражи нови мисаони напор ученика – напор који му је у интелектуалном смислу потребан да се "попење" на наредну степеницу.

[6] Видети: прилог 1 (страна 11.) Класификакица нивоа је узета из: [10.]: Наставни програм математике за средњу школу у Републици Србији, "Архимедес", Београд 1991, страна 82

"Степенаста" индивидуализација је добра и због тога што је домаћи задатак за ученике у највећем броју случајева очигледан, јер правило може да буде да свако ко је стигао до n-тог задатка за домаћи задатак самостално реши наредна три задатка, дакле задатке: $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$.

ВЕЖБА 3.

Дат је следећи низ задатака:

I. Решити једначину: $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos x$.

II. Решити једначину $12\cos x - 5\sin x + 13 = 0$.

III. Решити једначину: $\sin x = \cos x$.

IV. Решити једначину: $\sin x = 0{,}5$.

V. Решити једначину $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$.

VI. Колико решења у интервалу $(-2\pi, 3\pi]$ има једначина $2\sin^2 x = 1 + \cos x$?

VII. Колико решења у интервалу $(-\pi, 4\pi]$ има једначина $\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$?

VIII. Одредити решења једначине $\cos 3x + \cos 5x = 0$.

IX. Одредити решења једначине $\sin x = \sin 2x$.

X. Одредити решења једначине $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.

XI. Одредити решења једначине: $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Дате задатке поређај у "степенасти" низ од једанаест задатака намењених примени индивидуализираног облика наставног рада за систематизацију наставних садржаја за наставну тему: **Тригонометријске једначине** (2. разред)**.**

ВЕЖБА 4.

Користећи уџбеничку литературу конструиши сценарио за час индивидуализиране наставе коришћењем "степенасте" индивидуализације за следеће наставне теме:

1. Примена сличности на правоугли троугао (1. разред – час увежбавања)
2. Квадратни корен (2. разред – час увежбавања)
3. Површина и запремина купе (3. разред – час увежбавања)
4. Домен функције (4. разред – час увежбавања).

При конструкцији степеница треба узети у обзир најмање десет задатака при чему сваки образовни ниво треба да буде заступљен са два-три задатка како би "степенице" имале смисла и биле применљиве.

3.3. ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ ДОМАЋИХ ЗАДАТАКА

Поступак индивидуализације је увек могућ код задавања домаћих задатака, поготову ако су уџбеници или збирке задатака које се користе писане дифренцирано.[7] Индивидуализација домаћих задатака је пожељна, јер је крајње нелогично после часа реализованог индивидуализираном наставом задати домаћи задатак једнообразно. Како год да предвидимо униформи избор, за неку од категорија ученика ће тај избор бити бескористан, јер се своди на дилему са почетка овог текста.

Индивидуализација домаћих задатака се може обавити на два начина: "степенастом" диференцијациојом или диференцијацијом по нивоима.

"Степенаста" диференцијација подразумева више степенасто поређаних задатака, а сваки ученик решава оне задатке које уме. Дакле поступак идентичан претходном, при чему је домаћи задатак или само наставак "пењања" уз степенице дате на часу или "пењање" уз ново конструисане "степенице"..

Диференцијација по нивоима се састоји у томе да се задаци поделе у две или три групе и ученици бирају групу задатака коју могу успешно решити.

ПРИМЕР 4.

Разред:		Први
Наставна јединица:		Примена подударности троуглова
Тип часа:		Час после увежбавања
ДОМАЋИ ЗАДАТАК:		
1.	НП	Троугао ABC и троугао A'B'C' су подударни, ако је $c = c'$, $b = b'$ и $h_c = h_c'$. Доказати.
2.	НП	Доказати да је у једнакокраком троуглу висина која одговара основици, симетрала угла наспрам основице и симетрала основице. Доказати.
3.	НП	Тежишна дуж која одговара хипотенузи дели правоугли троугао на два једнакокрака троугла. Доказати
4.	НП	У правоуглом троуглу ABC један оштар угао је 30^o. Доказати да је катета која је наспрам угла од 30^o једнака половини хипотенузе.
1.	НР	Троугао ABC и троугао A'B'C' су подударни, ако је $a = a'$, $b = b'$ и $h_c = h_c'$. Доказати.
2.	НР	Доказати да су у једнакокраком троуглу висине које одговарају крацима подударне.
3.	НР	У троуглу ABC тачка H је пресек висина троугла и $CH = AB$. Одредити $\angle ACB$.
4.	НР	У троуглу ABC страница AB је највећа. На страници AB дате су тачке M и N такве да је $AM = AC$ и $BN = BC$. Одредити $\angle$ MCN, ако је $\angle$ $ACB = 80^o$.

[7] Мисли се на посебну назнаку тежих и најтежих задатака у датој књизи, збирки ...

1.	НК	Доказати да су троугао ABC и троугао A'B'C' подударни, ако је $c = c'$, $h_c = h_c'$ и $t_c = t_c'$.
2.		Ако је троугао једнакокрак, онда су тежишне дужи које одговарају крацима подударне. Доказати. Важи ли обрнуто?
3.		У троуглу ABC висина h_c и тежишна дуж t_c деле $\angle ACB$ на три једнака дела. Одредити углове тог троугла.
4.		У троуглу ABC дати су углови $\angle ABC = 15^o$ и $\angle ACB = 30^o$. Права p садржи тачку A, нормална је на дуж AB и праву BC пресеца у тачки M. Доказати да је $AC = 2 \cdot BM$.

У претходном примеру имамо две могућности диференцијације. Прва је по нивогрупама НП (**н**иво **п**репознавања и репродукције), НР (**н**иво **р**азумевања и примене) и НК (**н**иво примене и **к**ретаивности) и ученик би бирао групу коју може да савлада, са правом да пређе и на задатке следеће групе. Друга могућност је "степенаста" диференцијација задатака, тј. трансформација система три пута од 1 до 4, практично у систем од 1 до 12 чиме би се добиле "степенице" са 12 степеника.

Недостатак "степенасте" диференцијације је можда превелико оптерећење ученика и чињеница да најспособнији ученици морају решавати и задатке елементарног нивоа, а недостатак диференцијације по нивоима је што је ипак присутна извесна дискриминација ученика. Ипак и једнан и други недостатак су мање болни него када се зада униформни домаћи задатак.

ВЕЖБА 5.

Конструисати диференциран домаћи задатак који треба дати ученицима после обраде наставне јединице: **Права (3. разред).** Избор задатака је слободан, а могу се користити и задаци дати у следећем низу. Домаћи задатак концепирати на три нивоа по 4 задатка:

I. Доказати да се тежишне дужи троугла секу у једној тачки.

II. Одредити једначину праве a која на негативним деловима x, односно y-осе, одсеца дужи чије су дужине редом 3 и 5.

III. У једначини $3y - 5x + 4p - 3 = 0$, одредити параметар p тако да дата права: a) садржи координатни почетак; b) на y оси одсеца одсечак дужине 6.

IV. Прва p садржи тачку M (2, 3). Одредити једначину праве p, ако је тачка M средиште дужи чије су крајње тачке пресеци праве p са координатним осама.

V. Дата је права $x - 2y + 4 = 0$. Одредити једначину праве p која на y оси одсеца одсечак једнак одсечку дате праве, а са x-осом гради угао који је два пута већи од угла дате праве.

VI. Одредити угао који са x осом заклапа права p: $x - y + 4 = 0$.

VII. У једначини $kx + (k + 1)y - p = 0$, одредити параметре k и p тако да дата права садржи тачку M (2, 1), и са координатним осама гради троугао чија је површина једнака 4.

VIII. Одредити једначину праве која садржи тачке: A (-2, -5) и B (3, 5).

IX. Дата је права $3x + 4y - 12 = 0$. Написати једначину прамена правих које садрже тачку пресека дате праве и x осе. Одредити једначину оне праве прамена која са x осом заклапа угао од 150^o.

X. Дате су тачке A (3, - 4), B (1, 6) и C (-5, 2). Одредити једначине тежишних дужи троугла ABC.

XI. Дата је тачка M (4, 3). Одредити праву p која садржи тачку M и која на кординатним осама одсеца дуж чија је дужина 15.

XII. Написати једначину праве p која садржи тачку M (3, 4) и која са x-осом заклапа угао од 60^{o}.

ВЕЖБА 6.

Користећи уџбеничку литературу конструиши диференциране домаће задатке за следеће наставне јединице:

1. Системи линеарних једначина (1. разред)
2. Синусна теорема (2. разред)
3. Геометријски низ (3. разред)
4. Особине функција (4. разред).

Индивидуализација наставних садржаја може бити изражена и код конструкције разних инструмената за проверавање и оцењивање стечених знања. Класични инструменти обично садрже по један задатак од сваког образовног нивоа, тако да је он примерен само за просечне ученике, док је за слабије ученике такав контролни инструмент претежак, а за боље ученике прелак.

Решење проблема може бити у индивидуализацији инструмената, тако да на новоу НП преовлађују проблеми препознавања, репродукције и разумевања наставних садржаја; на нивоу НР преовлађују задаци репродукције, разумевања и примене, а на нивоу НК проблеми разумевања, примене и креативности. Такав индивидуализарни инструмент пружа и бољи увид у знање сваког ученика појединачно, јер недиференциран приступ смањује могућност квалитетног дијагностицирања. Пример који следи репрезентује једну контролну вежбу дату по нивоима.

<u>ПРИМЕР 5.</u>

<u>*Разред:*</u>	Други
<u>*Наставна тема:*</u>	Квадратни трином
<u>*Тип часа:*</u>	Час провере стечених знања (контролна вежба)

КОНТРОЛНА ВЕЖБА:			
1.	НП	Саставити бар једну квадратну једначину чија су решења $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$.	3
2.		Дата је функција $y = кx^2 - (к + 1)x - 1$. Одредити параметар к, тако да дата функција има екстремну вредност за $x = 1$. Да ли се ради о максимуму или минимуму и колики он износи?	3
3.		Одредити све реалне бројеве p за које је израз $x^2 - 2x + p$ позитиван за свако реалан број x.	3
4.		Одредити скуп решења неједначине $\frac{8x - x^2 - 12}{x - 4} \geq 0$.	3

1.	НР	Дата је једначина $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Саставити квадратну једначину $y^2 + py + q = 0$, чија су решења $y_1 = 4(x_1^2 + x_2^2)$ и $y_2 = 2x_1x_2$.	4
2.		Од свих правоугаоника обима 40 одредити онај који има највећу површину.	4
3.		Одредити параметар к тако да израз $x^2 - 2кx - 6к + 12$ буде већи од -4 за сваки реалан број x.	4
4.		Дата је квадратна једначина $x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 = 0$. За коју вредност реалног параметра p су оба корена дате једначине негативна.	4
1.	НК	Дата је квадратна једначина $x^2 - x + p = 0$. Одредити параметар p тако да је збир кубова решења износи 7.	5
2.		Од свих правоугаоника уписаних у круг полупречника r одредити онај који има највећу површину.	5
3.		Ако су a, b, c дужине страница троугла, онда је израз $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ позитиван за свако реално x. Доказати.	5
4.		Испитати промене знака решења једначине $px^2 - 4x + 3p + 1 = 0$, ако је p реалан параметар.	5

Скалом за оцењивање може се регулисати да сваки ниво проверавања носи оцене од до тако да на пример: до 4 бода буде 1, од 5 – 8 оцена 2, од 9 – 12 оцена 3, од 13 – 16 оцена 4 и од 17 – 20 бодова оцена 5. Индвидуализирани систем проверавања и оцењивања даје већу шансу ученицима у оквиру једног нивоа.

Остаје питање да ли можемо са сигурношћу погодити ниво за сваког ученика и да ли је педагошки оправдано ученике тако диференцирати. Једно је сигурно. Овакав начин прове-равања далеко ће боље дефинисати ниво овлдавања садржајима јер не може се задацима нивоа примене мерити ниво репродукције и обрнуто?!

С обзиром да су задаци одабирани по областима (први је примена Виетових веза, други екстремна вредност квадратне функције, трећи знак квадратне функције и четврти знак квадратног тринома) могу се комбиновати и нивои, па ученик може бирати први задатак из групе НП, други из групе НР, трећи из групе НК и четврти опет из групе НП. Тиме се постиже да ученик може да бира, нема дискриминације ученика, а индивидуализација је максимална, јер сваки ученик може да искористи све своје интелектуалне потенцијале.

ВЕЖБА 7.

Направити предлог диференцираног писменог задатка на три нивоа у оквиру наставне теме: **Аналитичка геометрија у равни (3. разред).** Од пет потребних задатак за сваки образовни ниво, по један задатак посветити правој, кругу, елипси, хиперболи и параболи.

Разред:	Трећи
Наставна теме:	Аналитичка геометрија у равни
Тип часа:	Час провере стечених знања (писмени задатак)

ТРЕЋИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК			
1.			
2.			
3.	НП		
4.			
5.			
6.			
7.			
8.	НР		
9.			
10.			
11.			
12.			
13.	НК		
14.			
15.			

ВЕЖБА 8.

Користећи уџбеничку литературу конструиши сценарио за индивидуализиране писмене задатке за следеће наставне теме:

1. Линеарне једначине, неједначине и системи + Сличност (1. разред)
2. Тригонометрија (2. разред)
3. Површина и запремина обртних тела (3. разред)
4. Реалне функције (4. разред).

4. ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЈА ДОДАТНЕ НАСТАВЕ

Највеће могућности индивидуализације наставе пружају се у додатном раду са даровитим ученицима, јер се тај рад најчешће одвија индивидуалним активностима самог талентованог ученика.[8] Фронтални рад у редовној и додатној настави, ма колико он био квалитетан и методички богат, неће имати оптималне домете, ако га не прати и вредан, динамичан, свеобухватан и осмишљен самостални рад самог даровитог ученика. При том опет, и овде, понављамо констатацију да дидактичко-методички модели које излажемо и предлажемо за коришћење у наставној пракси, нису потпуно "чисти", јер садрже, у мањој или већој мери, и елементе других методичких модела што сигурно није хендикеп, већ предност модела које презентирамо.

У овом делу приказујемо моделе учења у којима се најчешће користи индивидуализацији наставе, уз напомену да као и у претходним дидактичко-методичким моделима, избор наставних садржаја и проблема није случајан, јер је он у највећој мери резултат вишегодишњег истраживачког трагања за најпогоднијим начинима презентације и усвајања богатих наставних садржаја додатне наставе математике у старијим разредима основне школе.

4.1. САМОСТАЛАН РАД НА ТЕКСТУ

Индивидуално учење се може реализовати радом ученика на унапред припремљеном и методички обликованом тексту који припрема наставник и који добијају одабрани ученици. Ученик се путем текста упознаје са најважнијим теоријским садржајима, а путем неколико решених примера и са конкретном применом дате теорије. Уз текст и примере примене могу се дати задаци за увежбавање, проблеми са математичких такмичења, конкурсни задаци и литература, тако да индивидуални рад ученика има висок степен самосталности.

Текст који се даје ученицима може бити оригиналан, методички обликован, ауторски текст наставника[9]. Међутим, текст може бити узет са Интернета[10], копиран из неког приручника[11] или математичког часописа,[12] или узет из неке сличне литературе.[13]

Најбољи материјал за самостално учење је онај материјал који је структуриран тако да ученика стави у што активнији положај, а да су при том садржаји који су дати за самостално учење одмерени и не превазилазе ниво математичких способности ученика на датом узрасту.

---

8 Видети књигу: Војислав Андрић: Диофантове једначине, Друштво математичара Србије, Ваљево 2008. (стр: 279-340) у којој је дато чак 20 различитих модела додатне наставе математике у средњим школама

9 Видети Прилог 2. и текст: Војислав Андрић – Решавање Диофантових једначина коришћењем производа

10 Видети: http://www.diofant.org/FAJLOVI/PDF%20UCENJE/ZBIRKA.pdf

11 Видети: [3]: З.Каделбург, Д.Ђукић, М. Лукић, И. Матић: Неједнакости – Коши – Шварцова неједнакост (стр: 13 – 15), Друштво математичара Србије, Београд 2004.

12 Видети чланке на почетку сваког броја "Тангенте" , "Кванта", "Математичко-физичког листа"

13 Видети књигу: Ђура Паунић: Правилни полигони, Друштво математичара Србије, Београд 2006.

ПРИЛОГ 2.

ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПРОИЗВОДА

Као инструмент за разликовање случајева при решавању Диофантових једначина често се користи производ. Први корак у решавању је трансформација бар једне стране једначине (зависно од случаја) у облик погодан за факторизацију како леве, тако и десне стране једнакости. Најповољнија ситуација је уколико се на једној страни једнакости израз који садржи промењљиве факторизује на чиниоце, а на другој страни једнакости факторизује константа. Примери који следе најбоље илуструју коришћење производа ради лакшег раздвајања случајева.

__ПРИМЕР 1.__ Орешити једначину $xy + 3y - 5x = 18$, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Једначина $xy + 3x - 5y = 18$ еквивалентна је са једначином $xy + 3y - 5x - 15 = 3$, односно $(x + 3)(y - 5) = 3$. Како је број 3 прост број, разликују се следеће могућности:

1) $x + 3 = 1, y - 5 = 3 \Rightarrow x = -2, y = 8$;

2) $x + 3 = -1, y - 5 = -3 \Rightarrow x = -4, y = 2$;

3) $x + 3 = 3, y - 5 = 1 \Rightarrow x = 0, y = 6$;

4) $x + 3 = -3, y - 5 = -1 \Rightarrow x = -6, y = 4$. Δ

Производ се успешно користи нарочито у случајевима када једна од страна једнакости представља производ простих бројева, без обзира да ли се ради о константама или промењљивим. Илустрација таквог једног случаја је следећи пример.

__ПРИМЕР 2.__ Одредити све просте бројеве p тако да је 2p + 1 седми степен неког природног броја.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени природни број n. Према условима задатка је $2p + 1 = n^7$, па је n непаран природан број. Из $2p + 1 = n^7$ следи једнакост $n^7 - 1 = (n - 1)(n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) = 2p$. Како су 1, 2, p и $2p$ једини чиниоци броја 2p, то су могући следећи случајеви:

1) Ако је $n - 1 = 1$, онда је $n = 2$, што није могуће, јер је већ речено да је n непаран број;

2) Ако је $n - 1 = 2$, онда је $n = 3$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1093 = p$. Како је 1093 прост број, то је уређени пар $(n, p) = (3, 1093)$ једно решење проблема.

3) Ако је $n - 1 = p$, онда је $n = p + 1 \geq 3$. Како је n паран број (јер је p прост број већи од 2, дакле непаран), то у овом случају нема решења.

4) Ако је $n - 1 = 2p$, онда је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n = 0$, што је немогуће, јер је n природан број што значи да је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n \geq 6 > 0$. Δ

__ПРИМЕР 6.__ Одредити све природне бројеве x такве да је $2^x + 1$ квадрат природног броја.

РЕШЕЊЕ: Ако је $2^x + 1 = y^2$, онда је $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1) = 2^x$. Једини чиниоци броја 2^x су степени броја 2. Нека је $2^x = 2^a \cdot 2^b$ (a $\geq b$), где је a + b = x. Тада је $y + 1 = 2^a$ и $y - 1 = 2^b$, па је $2^a - 2^b = 2$. Следи да је $2^b(2^{a-b} - 1) = 2$. Јасно је да је $2^b = 2$ и $2^{a-b} - 1 = 1$, па је $b = 1$ и a - b = 1. Дакле, a = 2, $b = 1$ и x = a + b = 3. Према томе је $2^3 + 1 = 9 = 3^2$, па је $y = 3$. Δ

<u>ПРИМЕР 4.</u> Доказати да број $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ није квадрат природног броја ни за један природан број n.

РЕШЕЊЕ: Како је $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2(n^2 + 2n + 1) + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 1) = (n + 1)^2 (n^2 + 1)$, то је добијени број потпун квадрат само ако је $n^2 + 1$ потпун квадрат, то јест $n^2 + 1 = a^2$. Тада је $a^2 - n^2 = 1$, тј. $(a - n)(a + n) = 1$. Следи да је $a - n = a + n = 1$, одакле је a = 1 и $n = 0$, што није могуће, јер $n = 0$ није природан број. Δ

<u>ПРИМЕР 5.</u> Решити једначину $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Погодном трансформацијом израза добија се да је дата једначина еквивалентна са једначином $(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$. Множењем са 4 добија се $(2x^2 + 16x + 7 - 7)(2x^2 + 16x + 7 + 7) = 4y^2$, а даљом трансфо-рмацијом $(2x^2 + 16x + 7)^2 - 49 = 4y^2$, па је $(2x^2 + 16x + 7)^2 – (2y)^2 = 49$. Одавде се добија производ $(2x^2 + 16x + 7 – 2y)(2x^2 + 16x + 7 + 2y) = 49$. Разликују се следећи случајеви:

1) $2x^2 + 16x + 7 – 2y = 1$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 49$;

2) $2x^2 + 16x + 7 – 2y = 7$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 7$;

3) $2x^2 + 16x + 7 – 2y = 49$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 1$;

4) $2x^2 + 16x + 7 – 2y = -1$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -49$;

5) $2x^2 + 16x + 7 – 2y = -7$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -7$;

6) $2x^2 + 16x + 7 – 2y = -49$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -1$.

Из добијених система једначина следе следећи системи једначина:

- $4x^2 + 32x + 14 = 50$ и $4y = 48$ или $x^2 + 8x – 9 = (x + 9)(x – 1) = 0$ и $y = 12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = 14$ и $4y = 0$ или $x^2 + 8x = x(x + 8) = 0$ и $y = 0$;
- $4x^2 + 32x + 14 = 50$ и $4y = -48$ или $x^2 + 8x – 9 = (x + 9)(x – 1) = 0$ и $y = -12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -50$ и $4y = -48$ или $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 = 0$ и $y = -12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -14$ и $4y = 0$ или $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7) = 0$ и $y = 0$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -50$ и $4y = 48$ или $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 = 0$ и $y = 12$.

Сва решења дате Диофантове једначине су: (x, y) $\in$ { (-9, 12), (1, 12), (0, 0), (-8, 0), (-9, -12), (1, -12), (-4, -12), (-7, 0), (-1, 0), (-4, 12)}.

Последњи задатак показује како се алгебарским трансформацијама наизглед сложена једначина може довести до производа два израза, а потом његовом анализом до такорећи најелементарнијих система једначина.

Наредни задаци ће још квалитетније илустровати коришћење метода производа.

ЗАДАЦИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

1. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројеве x и y за које је $xy + 2x = 7$.

2. Ако су x и y цели бројеви решити једначину $x^2 – y^2 = 12$. Колико таквих бројева има?

3. Одредити све парове целих бројева (x, y) такве да је:
a) $x^2 - 5 = 2xy$; b) $x^4 - y^4 = 15$;
c) $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$; d) $x^2 + 6y = y^2 + 4x + 10$.

4. Одредити природан број n и прост број p тако да је $p = n^4 + 4$.

5. Одредити природан број n тако да је $n^2 + 2n + 13$ квадрат неког природног броја.

6. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$?

7. Одредити природан број n и прост број p тако да је $5p + 1 = n^2$.

8. Постоји ли прост број p и цео број n тако да се прост број p може приказати у облику $8n^2 + 10n + 3$?

9. Одредити све парове целих бројева x и y тако да је њихов производ 5 пута већи од њиховог збира .

10. Одредити све правоугле троуглове са целобројним страницама чија је једна катета $a = 9$ cm.

11. *Постоје ли прост број p и природан број κ за које је $7p + 1 = \kappa^3$?

12. Одредити целе бројеве a, b и c такве да је $abc + ab = a + ac + 3$.

13. Постоје ли прост број p и природан број κ такви да је $\kappa^3 - 3\kappa = p - 2$?

14. *Ако су n и m природни и p прост број решити следеће једначине:
a) $2p^2 + 1 = n^5$; b) $n^4 + n^2 + 1 = p$;
c) $n^4 + 4m^4 = p$.

15. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ има бесконачно много решења. Доказати.

16. **Доказати да ако су x и y природни бројеви и ако је $x \leq y$, онда једначина $xy + x + y = 2^{32}$ има само једно решење.

17. *Ако је m природан број, онда једначина $x^2 + 2xy + y^2 - mx - my - m = 1$ има тачно m решења у скупу природних бројева. Доказати.

18. **Доказати да једначина $x(x + 1) = 4y(y+1)$ нема решења у скупу природних бројева и има бесконачно много решења у скупу позитивних рационалних бројева. Колико решења има дата једначина у скупу целих бројева?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

19. *Ако је p непаран прост број, а x и y природни бројеви тако да је $x > y$, онда једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p}$ има само једно решење. (Мађарска 1931.)

20. *Дужина једне катете правоуглог троугла је 21, а дужине осталих двеју страница су природни бројеви. Колико има таквих троуглова? Одредити њихове странице. (Србија 1971.)

21. *Дата је једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ (x и y су природни бројеви). Ако је p прост број, а онда је број решења једначине једнак 3, а ако је p сложен број, онда је број решења једначине већи од 3. Доказати. (36. ММО 1973.)

22. **Одредити све парове (x, y) целих бројева таквих да задовољавају једнакост $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$. (ДР Немачка 1974.)

23. *Решити једначину $2(x^2 - y^2) = 1978$, где су x и y природни бројеви. (Србија 1978.)

24. **Одредити све природне бројеве који се не могу представити у облику збира неколико (најмање два) узастопних природних бројева. (Србија 1978.)

25. *Одредити све парове целих бројева (x, y) који задовољавају једначину $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$. (41. ММО 1978.)

26. *Одредити сва целобројна решења једначине $xy = x + y + 1$. (Србија 1987.)

27. *Одредити све просте бројеве p и q тако да је $p^2 - 2q^2 = 1$. (Србија 1990.)

28. *Одредити све целе бројеве x и y за које је $xy + x - 3y = 10$. (Србија 1991.)

29. *На колико начина се број 1991 може представити у облику збира узастопних природних бројева? (Србија 1991.)

30. *Доказати да једначина $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$ има јединствено решење у скупу природних бројева ако и само ако је n пост број. (Србија 1991.)

31. *Постоје ли цели бројеви n и к такви да је $n^3 - n + 2^n = 1992к$? (Србија 1992.)

32. *Одредити природне бројеве x и y, за које је збир бројева $x + y$, $x - y$, xy и $x : y$ једнак 245. (Србија 1992.)

33. *Одредити природан број n такав да када му се дода 2 или одузме 7 добијају се квадрати целих бројева. (СРЈ 1993).

34. *Одредити све природне бројеве облика $\overline{222...222}$ који се могу представити у облику збира или разлике квадрата два природна броја. (Србија 1996.)

35. **Одредити све тројке целих бројева (x, y, z) ако је $x + y + z = 0$ и $x^3 + y^3 + z^3 = -18$. (Србија 2000.)

36. *Одредити све природне бројеве n за које је вредност израза $n^2 + 2n + 1997$ квадрат неког природног броја. (Србија 1997.)

37. *Одредити цифре x, y и z тако да у декадном систему важи једнакост $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$. (СРЈ 1997.)

38. *Одредити све природне бројеве n такве да је вредност израза $n^2 + 2n + 2000$ квадрат неког природног броја. (Србија 2000.)

ВЕЖБА 9.

Конструиши радни материјал, текст за додатну наставу на тему:

Пребројавање скупова бројева (2. разред).

4.2. САМОСТАЛНО РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

О индивидуализацији самосталним решавањем проблема већ је било говора у уводу, јер се практично свака индивидуализација у настави математике своди на самостално решавање неких математичких проблема..

У овом делу указујемо на још два аспекта самосталног решавања проблема: планско (тематско) решавање проблема и решавање проблема на више начина.

Планско (тематско) решавање проблема се реализује коришћењем унапред припремљених наставних листића[14] или већ постојеће математичке литературе[15] (најчешће збирки задатака или билтена са математичких такмичења). Задаци се дају у низу од лакшег ка тежем, а поред задатака за увежбавање, присутни су задаци са математичких такмичења и конкурсни задаци. Ученик их решава самостално, а тамо где настану проблеми има могућност да консултује литературу или затражи помоћ од других ученика или наставника.

При овом облику индивидуалног рада треба водити рачуна да се он не претвори у учење решења, јер се понекад догађа да деца не решавају проблеме, већ уче готова решења дата на крају књиге или збирке. Једна наша пословица каже да "Без муке нема науке", тј. без мисаоног напора нема интелектуалног напретка и зато треба контролисати самосталан рад ученика. Ако се он одвија и спорије, али сопственим интелектуалним снагама, ефекти индивидуалног рада ће бити далеко већи, него када је то динамично учење решења датих у збирци, јер то, с обзиром да се ради само о репродукцији готових знања неће значајније утицати на развој математичко-логичких потенцијала ученика.

ПРИЛОГ 3.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

<u>ПРИМЕРИ ЗА РАД</u>

ПРИМЕР 1. Ако су тежишне линије из темена B и C троугла ABC узајамно нормалне, онда је $ctg\beta + ctg\gamma \geq \frac{2}{3}$. Доказати.

ПРИМЕР 2. За произвољно α важи $\left| tg\alpha + ctg\alpha \right| > \left| \sin\alpha + \cos\alpha \right|$. Доказати.

ПРИМЕР 3. Доказати неједнакост $\cos x + \cos y - \cos(x+y) \leq \frac{3}{2}$.

ПРИМЕР 4. Доказати, ако је $0 < x < \pi/4$, тада је $\frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot (\cos x - \sin x)} > 8$.

ПРИМЕР 5. Доказати неједнакост $(ctg^2\alpha - 1)(3ctg^2\alpha - 1)(ctg3\alpha \cdot tg2\alpha - 1) \leq -1$.

ПРИМЕР 6. Доказати неједнакост $\sin(\cos\alpha) < \cos(\sin\alpha)$.

ПРИМЕР 7. Доказати да за $x \geq 2$, важи неједнакост $\sin\frac{1}{x-1} + \sin\frac{1}{x+1} - 2\sin\frac{1}{x} > 0$.

ПРИМЕР 8. Доказати, да ако је $tgx = 3tgy$, $0 \leq x < \pi/2$, $0 \leq y < \pi/2$ важи $x - y \leq \pi/6$.

ПРИМЕР 9. Доказати да $0 < (n+1)x < \pi/2$, $n \in N$, важи неједнакост $\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} < \cos^{2n+1} x$.

---

[14] Видети Прилог 3. - Наставни листић припремљен за реализацију наставне теме "Тригонометријске неједнакости" (3 . разред)

[15] Видети [2.] Војислав Андрић – Диофантове једначине (збирка задатака за додатну наставу математике са решењима), "Круг", Београд, 2006. године

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

1. Доказати да за свака два рационална броја p и q, важи $\left|\dfrac{\sin p-\sin q}{1-\sin p\cdot\sin q}\right|<1$.

2. Нека су α и β два угла неког троугла. Доказати неједнакост $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}\geq ctg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

3. Доказати, да ако је $\alpha\neq k\pi$, $k\in Z$, важи $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot tg\,\dfrac{\alpha}{2}}<2$.

4. Доказати да је $|y|\leq 1$, где је $y=\dfrac{x^2\cos\alpha-2x+\cos\alpha}{x^2-2x\cdot\cos\alpha+1}, \alpha\in(0,\pi)$.

5. Доказати да за $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4(n-1)}$, важи неједнакост $\mathrm{tg}\, n\alpha > n\mathrm{tg}\alpha$, $n\in N$, $n>1$.

ЗАДАЦИ СА ТАКМИЧЕЊА

6. Доказати неједнакост $(x+y)(x+y+2\cos x)+2\geq 2\sin^2 x$.

7. Доказати неједнакост $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2}+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$.

8. Доказати, да ако је $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$, $0<\gamma<\pi/2$ и $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\cdot\mathrm{tg}\alpha<1$, тада важи $0<\alpha+\beta+\gamma<\pi/2$.

9. Доказати неједнакост $-4<\cos 2x+3\sin x\leq 2\dfrac{1}{8}$.

10. Ако су α, β, γ углови троугла, доказати $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

КОНКУРСНИ ЗАДАЦИ

11. Доказати неједнакост $\dfrac{a+c}{2}-\dfrac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\leq y\leq\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$, где је $y=a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x\cdot\cos x+c\cdot\cos^2 x$.

Помоћне неједнакости:

* Ако је $0<x<\pi/2$, онда важи $\sin x<x<\mathrm{tg}x$.

* Ако је $0<\alpha<\pi/2$, важи $\alpha-\dfrac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha$.

ВЕЖБА 10.

Одабери и поређај у исправан дидактичко-методички низ задатке на тему:
Дирихлеов принцип (1 разред)
Изопериметријски проблеми (2 разред)**.**

*

Квалитетан додатни рад подразумева и низ поступака који имају за циљ да активирају креативне способности ученика. Један од значајних поступака да се то постигне је решавање проблема на више начина, чиме се шири математички видици и повећава репертоар идеја ученика, али и развијају стваралачке способности. У односу на претходне моделе овде нема неких већих, нових дидактичко-методичких појединости, а специфична разлика је у томе што се за један те исти проблем тражи више идеја.

На тај начин се постиже методолошка разноврсност даровитих ученика и "тренира" истраживачки дух. Овај поступак индивидуализације је добар и због тога што је његова примена могућа на скоро свим наставним садржајима. Важан део овог модела индивидуализације је презентација решења и треба водити рачуна да она буде добро планирана, разновсна и ефикасна.

<u>ПРИМЕР</u> Одредити све природне бројеве x и y такве да је њихов збир пет пута мањи од њиховог производа.

Очигледно се дати проблем може моделирати једначином $xy = 5(x + y)$, где су x и y природни бројеви тада су могућа следећа решења:

РЕШЕЊЕ 1. Ако се једначина $xy = 5(x + y)$, тј. $xy - 5x - 5y = 0$, трансформише у $xy - 5x - 5y + 25 = 25$, добија се једначина $(x - 5)(y - 5) = 25$. Јасно је да $x - 5$ може бити 1, 5 или 25, па је $x \in \{6, 10, 30\}$ а сва решења проблема су (6,30) ; (10, 10) и (30,6). Дакле, проблем је решен коришћењем производа.

РЕШЕЊЕ 2. Из $xy = 5x + 5y$ следи да је $x = \frac{5y}{y-5} = 5 + \frac{25}{y-5}$. Како је x природан број то и десна страна једнакости мора бити природан број, па је $y - 5$ делилац броја 25, то јест $(y -5) \in \{1, 5, 25\}$ или $y \in \{6, 10, 30\}$. Уређени парови (6,30); (10, 10) и (30,6) су решења проблема.. Проблем је решен коришћењем количника.

РЕШЕЊЕ 3. Из једнакости $xy = 5(x + y)$, јасно је да је један од бројева x или y дељив са 5. Нека је $x = 5к$ ($к \in N$). Тада је $5кy = 5(5к + y)$ или $кy = 5к + y$. Следи да је $(к - 1)y = 5к$, па је $y = \frac{5k}{k-1}$.

Како су к и к-1 узајамно прости бројеви, то је к -1 садржано у броју 5, па је $к = 2$ или $к = 6$, а одговарајуће вредности за x су 10, односно 30. Као решења се добијају уређени парови (10, 10) односно (30, 6). Ако се узме да је $y = 5m$ ($m \in N$), сличним разматрањем се као решења добијају парови (10, 10) и (6, 30), па су сва решења дате једначине (6, 30); (10, 10); (30, 6), а до решења се дошло коришћењем дељивости бројева.

РЕШЕЊЕ 4. Из $xy = 5(x + y)$ дељењем са 5xy добија се $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$. Јасно је да су x и y природни бројеви већи од 5. Ако, не умањујући општост претпоставимо да је $x \le y$, онда је $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$, па је $\frac{2}{y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \le \frac{2}{x}$. Следи да је $x \le 10$, или $6 \le x \le 10$.

Заменом вредности 6, 7, 8, 9 и 10 у полазну једнакост добија се да је y природан број само у случајевима x = 6 и x = 10. Дакле, као решења се добијају уређени парови (10, 10) односно (6, 30). Ако се узме да је $y \leq x$, онда се, сличним разматрањем, као решења добијају парови (10, 10) и (30, 6), па су сва решења дате једначине (6, 30); (10,10); (30, 6). Пут до решења остварен је уз помоћ неједнакости. Δ

4.3. РЕШАВАЊЕ КОНКУРСНИХ ЗАДАТАКА

Решавање конкурсних задатака је онај облик индивидуалног рада у коме ученик поред решавања датог проблема има још један додатни захтев, а то је да добијено решење презентира у што је могуће квалитетнијој форми (најчешће писмено, Интернетом или на неки други начин). Конкурсни задаци могу бити задаци из математичких часописа, задаци на разним такмичењима, али и они које задају сами наставници. Једина, али веома битна разлика је да за решавање таквог проблема постоји и посебан мотив: објављивање решења у часопису, пласман на виши ступањ такмичења, књига или друга награда коју наставник поклања .

Јасно је да решавање конкурсних задатака опет није суштинска новина, већ само специјални случај учења решавањем проблема. Међутим, поред већ поменутих специфичности (реализује се самосталним радом ученика и има посебан мотивациони фактор) решавање конкурсних задатака има још једну посебност која је садржана у настојањима да се код даровитог ученика створи навика коректног образлагања и исписивања решења. Дакле, решења у коме неће бити позивања на тривијалност, очигледност и слично, него конституисања решења које квалитетно одсликава ученикову идеју, које је прецизно, јасно и без логичких и материјалних грешака. То решење нема додатних образложења, што је могуће у усменом образлагању решења и због тога тражи максималну концизност, али и оптималну заокруженост у смислу да решење нема необразложених чињеница и недоречених празнина.

Зато технолошка обука у исписивању решења није занемарљив методички захват и тражи сталну бригу наставника за верно преношење квалитетних мисли даровитог ученика на "документ" који се зове решење задатка. У том смислу би упутно било да се као што постоји алгоритам са популарним називом "Како ћу решити математички задатак"[16], направи још један алгоритам – "Како ћу изложити решење математичког задатка"[17].

Препорука за реализацију овог облика индивидуализације може бити и да ако нема конкурсних задатака, треба их измислити,[18] без обзира да ли ће конкурсни задаци бити из часописа или ће њихови аутори бити наставници. Конкурсне задатке могу припремити уз квалитетно упутство наставника и сами ученици, али то је већ посебна тема.

[16] Видети интернет адресу: http://www.diofant.org/FAJLOVI/PDF/KAKO%20CU%20RESITI%20ZADATAK.pdf

[17] Видети интернет адресу: http://www.diofant.org/FAJLOVI/PDF/ISPISIVANJE%20RESENJA.pdf

[18] Искуства показују да ученици своје веома добре идеје и решења, због неувежбаности, врло често лоше прикажу приликом записивања решења проблема, што се увежбавањем може превазићи

4.4. ПРИПРЕМА ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Припрема ученика за математичка такмичења је још један од могућих облика индивидуализације наставе математике. Оно што је за овај облик рада важно рећи је да припрема ученика за математичка такмичења није никакав нов облик индивидуализације, јер се он одвија и самосталним решавањем проблема и радом на тексту и решавањем конкурсних задатака, али пре свега коришћењем свих изложених облика индивидуализације редовне наставе математике.

Посебне припреме такорећи да нису потребне, ако се све напред речено континуирано и квалитетно ради. Тематски приступ у припремању ученика увек даје боље резултате од простог увежбавања задатака са прошлих математичких такмичења. Наставник који прати математичка такмичења увек ће наћи могућност да кроз додатне захтеве, "степенасту" индивидуализацију, тематски рад на тексту или тематско решавање проблема пласира све потрене задатке и идеје за њихово решавање.

Важно је напоменути и да се често између додатне наставе и припреме ученика за математичка такмичења неоправдано ставља знак једнакости. То није и не може бити тачно из најмање два разлога: постоје ученици који нису такмичари и рад са талентованим ученицима није само дрил у решавању математичких проблема, већ стални рад на проширивању и продубљивању математичких знања, видика и идеја обдарених.

5. РАЧУНАРИ И ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЈА НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Највеће могућности за индивидуализацију наставе математике леже у савременој компјутерској технологији[19], јер интернет представља не само моћно средство за међусобну комуникацију него и могућност да се његовим коришћењем добије читав низ корисних наставних материјала.

Интерактивно учење[20] се данас сматра за облик учења који има висок степен активности свих учесника у процесу учења. Рачунар може бити значајан фактор те активности и доприносити бржој комуникацији и квалитетнијој размени података, без обзира да ли се ради о комуникацији ученик-професор, ученик-ученик или некој трећој врсти комуникације.

Шта се обичном e-mail комуникацијом може добити?

---

[19] Видети: http://www.diofant.org/FAJLOVI/PDF/08.%20KORISCENJE%20RACUNARA.pdf

[20] О индивидуалном учењу коришћењем интернета детаљније се може прочитати на интернет адреси: http://www.diofant.org/metodologija.htm

5.1. ИНТЕРАКТИВНА КОМУНИКАЦИЈА УЧЕНИК - НАСТАВНИК

Наставник може направити виртуелну учионицу и скоро свакодневно дозирати проблеме којима ће привлачити пажњу ученика. Не би било добро да то увек буду само "голи" задаци, чије се решење тражи. Наравно, биће и тога, али се електронском поштом може доставити и текст који треба проучити да би се могли решавати проблеми, или упит везан за нешто што једноставно треба открити (иако је то откривено пре више стотина година). Рачунар једноставно омогућује наставнику да му наставни план и програм нису препрека, а број часова ограничавајући фактор. У оваквом раду разредно-часовни систем не представља никакав проблем, јер наставник за своје ученике има онолико времена колика су њихова интересовања.

Ученици могу слати решења проблема[21]. Али и питати о задацима које нису могли да реше или о теоријским проблемима које нису до сада упознали. Радозналост је једна од најзначајнијих карактеристика даровитости. И због тога наставник мора бити припремљен на сталне упите. Интерактиван рад разбија илузију да је наставник свезнајући, јер ће понекад ученици решити и оно што он није успео да реши. Ученици ће много боље комуницирати и пријатније се осећати када та комуникација буде дефинисана као заједничко трагање за неким новим знањима. Рачунар је ту да прекрати време до следећег редовног часа, јер се у међувремену може још много тога интересантног урадити, открити, поставити, пронаћи на разним математичким сајтовима који су доступни на Интернету.

5.2. ИНТЕРАКТИВНА КОМУНИКАЦИЈА УЧЕНИК - УЧЕНИК

Комуникација ученик-ученик је нешто што обогаћује комуникацију ученик-наставник. Електронски форум свих учесника додатне насатаве[22] је зато добро решење, јер су онда све информације пред свима и сви добијају све поруке, дакле задатке, решења, резултате, текстове, линкове, информације ... и сви деле радост решења, открића, доброг резултата. Тиме ће се добити и да се неки проблем реши на више начина, али и да једна нереализована идеја неком послужи за реализацију своје идеје.

Рачунар је и могућност да наставник своје вансеријске ученике повеже са другим младим и талентованим људима, али и са другим наставницима који могу бити од користи у правилном и динамичном развоју сваког даровитог ученика.

---

21 Иако су ученици старијих разреда основне школе још невешти у Интернет комуникацији углавном нема препрека за електронску комуникацију, јер се за то могу веома брзо обучити, а у крајњем случају та комуникација може ићи и преко родитеља

22 Аутори овог рада са својим ученицима и колегама комуницирају путем форума који има адресу: spec-mat-vg@yahoogroups.com

5.3. ИНДИВИДУАЛНИ ПРИСТУП БАЗАМА ЗНАЊА

Корисне информације наставник, а и ученик може наћи на Интернету. Те информације ученик може користити за самосталан рад без обзира да ли се ради о математичким проблемима, текстовима или неким другим материјалима. На жалост за ученике млађих разреда основне школе је мало таквих база знања, али има доста прилога из рада разних математичких кружока. Наредне интернет адресе, http://mmmf.math.msu.su/, http://www.mccme.ru/circles/mccme/index.htm, http://www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm, припадају математичком кружоку Московског центра за непрекидно математичко образовање и математичком кружоку МГУ (московског државног универзитета). На њима се могу наћи материјали за индивидуални рад ученика. Наравно ти материјали траже превођење, адаптацију и пажљиво пласирање.

5.4. ИНДИВИДУАЛНИ ПРИСТУП БАЗАМА ЗАДАТАКА

На интернету постоје и базе задатака за самостални рад које су врло употребљиве, јер садрже тематски диференциране проблеме. Сигурно најупотребљивија је база проблема која је на нашем језику и налази на адреси http://srb.imomath.com/. Ова база задатака садржи задатке са математичких такмичења, али и низ наставних тема и тематских јединица и писана је управо за додатну наставу, додуше више за средњошколце, али се може успешно користити и за 7. и 8. разред основне школе[23].

Интересантне су и адресе, које су наведене у претходном поглављу, али и база задатака која се налази на адреси http://www.problems.ru/ и која садржи задатке по областима, разредима и нивоима тежине. На адреси http://www.math-on-line.com/olympiada-edu/zadachi-kenguru-math.html, односно http://www.prioritet-school.ru/olimpiada/mat13_4kl.doc могу се пронаћи задаци са разних математичких такмичења за млађе ученике.

*

Важно је напоменути да се пажљивим претраживањем Интернета може наћи још много интересантних и употребљивих математичких сајтова[24] који могу значајно допринети квалитетном одабиру задатака за индивидуализацију редовне и додатне наставе математике. Међутим, то је посао који је сталан и никада не представља изгубљено време, јер једном пронађене и меморисане интернет адресе се увек могу користити.

[23] Ова база задатака садржи задатке са решењима и без решења, али и текстове са краћим теоријским разматрањима што у сваком случају помаже младим математичарима.

[24] Видети поглавље 7 - предлог једног списка сајтова који дајемо на крају овог текста

6. ЛИТЕРАТУРА

[1.] Андрић Војислав: Математика на Интернету - КММ "Архимедес", Београд, 2006.

[2.] Андрић, Војислав: Диофантове једначине (збирка решених задатка за додатну наставу математике у основним и средњим школама) - "Круг", Београд, 2006.

[3.] З.Каделбург, Д.Ђукић, М. Лукић, И. Матић: Неједнакости, Друштво математичара Србије, Београд 2004.

[4.] Вилотијевић, Младен: Дидактика (организација наставе) - Завод за уџбенике у наставна средства и Учитељски факултет, Београд, 2000.

[5.] Група аутора: 1000 задатака са математичких такмичења – Друштво математичара Србије, Београд 2006.

[6.] Група аутора: Приручник за додатну наставу математике - Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1978.

[7.] Ђорђевић, др Босиљка: Додатни рад ученика основне школе - "Просвета", Београд, 1977.

[8.] Ђукић, Мара: Дидактички чиниоци индивидуализоване наставе - Филозофски факултет (одсек за педагогију), Нови Сад, 1995.

[9.] Ивић, Иван и Ана Пешикан, Слободанка Антић: Активно учење – Београд, 2001.

[10.] Наставни програм математике за гимназије у Републици Србији - КММ "Архимедес", Београд, 1991.

[11.] Ничковић, Радисав: Учење путем решавања проблема у елементарној настави математике – "Научна књига", Београд, 1977.

[12.] Поја, Ђерђ: Како ћу решити математички задатак? – "Школска књига", Загреб, 1967.

[13.] Пойа, Джордж – Математическое открытие – "Наука", Москва, 1976

[14.] Поткоњак, Н, Поткоњак М, Крнета Љ: Педагогија - Завод за издавање уџбеника и наставних средстава, Београд, 1972.

[15.] Уџбеници и збирке задатака за математику за средњу школу

[16.] Часопис “Тангента”- Друштво математичара Србије, Београд, 1995-2008.

[17.] З.Каделбург, В. Мићић, Д.Ђукић: Увод у теорију Бројева, Друштво математичара Србије, Београд 2004.

[18.] Ђура Пaунић: Правилни полигони, Друштво математичара Србије, Београд 2006.

[19.] Андрић Војислав: Диофантове једначине, Ваљевска гимназија, Друштво математичара Србије, Ваљево 2008.

7. ИНТЕРНЕТ САЈТОВИ КОЈЕ ПРЕПОРУЧУЈЕМО НАСТАВНИЦИМА ЗА РЕАЛИЗАЦИЈУ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ:

РБ	АДРЕСА САЈТА	САДРЖАЈ САЈТА
1.	http://sr.wikipedia.org/wiki	Енциклопедија "Википедија" (српски језик)
2.	http://srb.imomath.com	Математичка такмичења у Србији (српски језик)
3.	http://www.dms.org.yu/	Друштво математичара Србије (српски језик)
4.	http://www.arhimedes.co.yu/	КММ "Архимедес" Београд (српски језик)
5.	http://www.diofant.org/	Сајт о Диофантовим једначинама, са много корисних линкова и за друге ствари (српски језик)
6.	http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/	Историја математике (енглески језик)
7.	http://www.mathkeng.org	Званични сајт европског такмичења "Кенгур" (енглески језик)
8.	http://www.amt.kanbera.au/aboutamc.html	Сајт аустралијског математичког друштва (енглески језик)
9.	http://www.uwaterloo.ca	Сајт канадског универзитета са сајтом Канадског друштва математичара
10.	http://www.mccme.ru/	Сајт Московског центра за континуирано математичко образовање (руски језик)
11.	http://kvant.mccme.ru/key.htm	Часопис "Квант" који садржи разне теме из програма додатне наставе
12.	http://www.mccme.ru/circles/mccme/index.htm	Сајт математичког кружока Московског центра (руски језик)
13.	http://www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm	Сајт олимпијског математичког кружока (руски језик)
14.	http://www.problems.ru/	Енциклопедија математичких задатака која садржи неколико хиљада проблема по областима, разредима и нивоима (руски језик)
15.	http://www.mccme.ru/free-books/	Електронске библиотеке које садрже више од 300 математичких књига на руском језику
16.	http://www.diofant.org/elektronske%20biblioteke.htm	Разне електонске библиотеке које садрже free примерке математичких књига
17.	http://srb.imomath.com/index.php?options=mat_c|dodatne_c&p=32fWWd	Материјали за припрему ученика за такмичења – српски језик