25. U VII_3 postoje dva „klana“, Dešin i Filipov. U odeljenju ima 23 učenika, od toga 10 Dešinih, 8 Filipovih i 5 neutralnih. Na koliko načina možemo formirati grupu od 6 učenika a da među njima nema neprijatelja?
26. U razredu je 21 učenik: 12 dečaka i 9 devojčica. Na koliko načina se mogu formirati grupe od 3 učenika tako da ni u jednoj ne budu svi učenici istog pola?
27. Na koliko se načina može povući prvi potez u šahu?
28. Na koliko načina se može izvući 7 kuglica, bez vraćanja, od 39 kuglica označenih brojevima od 1 do 39?
29. Na koliko načina se može popuniti tiket sportske prognoze ako ima 13 parova, a za svaki par su moguća tri ishoda: 0, 1 i 2?
30. Devet je sati. Trgovac zaključava prodavnicu. U njoj je ostalo još 10 kupaca. Rade 3 kase. Na koliko načina se kupci mogu rasporediti da bi platili račun?

Др Весна Јевремовић
Математички факултет
Београд

Како изабрати, решавати и састављати задатке из комбинаторике

Републички семинар за наставу математике
Београд, 2010

Мало теорије ☺

За комбинаторику се може рећи да је област математике која се бави пребројавањем елемената коначних скупова и одређивањем броја начина да се ти елементи групишу. Комбинаторика се среће у свакодневном животу, па је увођење комбинаторике у наставу с једне стране природно, а с друге стране једно од најбољих средстава за развијање креативности, основа за формирање менталних слика. Наравно, и овде треба разликовати научни аспект неке математичке дисциплине од наставног аспекта. У том смислу, поготову на ранијим узрастима, ученике не треба оптерећивати (тешким) речима као што су: пермутације, варијације и комбинације са и без понављања, већ кроз одговарајуће моделе објаснити кад је суштина у редоследу елемената (пермутације и варијације) а кад само у броју различитих елемената неког скупа (комбинације).

Комбинаторика, као и геометрија, је реална, људима блиска математичка дисциплине, и стога погодна и потребна и у почетним разредима. Комбинаторика садржи елементе игре, и то јој обезбеђује добар пријем и код најмлађих слушалаца. Теме за задатке је могуће наћи у осталим предметима: матерњи језик, страни језик, музичко, физичко, ликовно, географија, био-

tan, b) redosled pesama jeste bitan, c) domaće i strane pesme idu naizmenično?

18. Na koliko načina može biti osvetljena prostorija koja ima osam sijalica? (Koje se mogu upaliti nezavisno jedna od druge)
19. Pet dečaka i pet devojčica sede za okruglim stolom u poretku muško, žensko, muško... Koliko raznih razmeštaja postoji?
20. U vreći ima 5 belih, 3 crne i 8 plavih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba izvući, ne gledajući, da bi bila barem jedna plava? Na koliko načina se mogu izabrati tri kuglice različitih boja?
21. Na parkingu je parkirano 12 automobila, tako da su raspoređeni u 2 reda sa po 6 automobila u svakom redu. Na koliko načina 12 automobila tu može biti parkirano ako je važno koji automobil je u kom redu?
22. U jednoj prodavnici na polici se nalazi 8 čokolada, 5 kutija keksa i 3 bombonjere. Na koliko načina se ovi proizvodi mogu poređati jedan do drugog tako da sve 3 bombonjere budu jedna do druge?
23. U gradu su dve paralelne jednosmerne ulice koje su presečene sa 6 dvosmernih poprečnih ulica. Na koliko načina se sa početke jedne od tih paralelnih ulica može stići na kraj druge od njih?
24. Na koliko načina na tabli 6 x 6 možemo rasporediti brodove 3 po jedan kvadratić, 2 po dva kvadratića i 1 od tri kvadratića?

dečacima, c) da dva određena učenika sede zajedno?

13. Na koliko načina 3 devojčice mogu izabrati kišobrane ako imaju ukupno 6 crvenih, 5 crnih i 4 plava, a žele da imaju: a) kišobrane iste boje, b) kišobrane različitih boja, c) dve žele crvene kišobrane a jedna želi plavi.
14. Devojčica na CD-u ima 36 pesama. Na koliko načina može izabrati 7 pesama: a) tako da se nijedna ne ponavlja, b) da se svaka može ponoviti?
15. Na koliko načina 5 štenaca može da sisa mleko kod svoje mame?
16. U razredu ima 24 učenika, i među njima su 3 zaljubljena para. 1) Na koliko načina mogu da budu svi učenici raspoređeni u klupe (sa po 2 učenika u klupi). 2) Na koliko načina mogu da budu raspoređeni u klupe (sa po 3 učenika u klupi). 3) Na koliko načina mogu da budu raspoređeni u klupe za po 2 učenika a da zaljubljeni parovi sede zajedno? 4) Na koliko načina mogu da budu raspoređeni u klupe za po 3 učenika a da zaljubljeni parovi sede zajedno? 5) Na koliko načina mogu da budu raspoređeni u klupe za po 3 učenika a da zaljubljeni parovi ne sede zajedno?
17. Učenici na školskom razglasu za vreme velikog odmora puštaju muziku. Imaju vremena za 8 pesama, od kojih 4 moraju biti domaće a 4 strane. Na koliko načina oni to mogu uraditi ako imaju ukupno 56 pesama od kojih je 20 domaćih, i ako: a) redosled pesama nije bi-

логија... С друге стране, многобројне су и “озбиљне” примене комбинаторике: у молекуларној биологији например при одређивању броја начина да се гени распореде дуж хромозома, у рачунарству у решавању проблема редоследа приступа централном процесору...

Као математичка дисциплина сматра се да је комбинаторика настала 1666, са Лајбницовим радом “Dissertatio de arte combinatoria”. Примена комбинаторике се среће и у радовима Тартаље, Паскала, Фермаа, Бернулија, Ојлера... а у средњем веку је један задатак из комбинаторике имао и лековита својства. Наиме, сматрало се да ко прочита на све могуће начине реч ABRACADABRA у доњој шеми, идући навише и удесно, “сигурно мора да оздрави од тродневне грознице”

A	B	R	A	C	A	D	A	B	R	A
	A	B	R	A	C	A	D	A	B	R
		A	B	R	A	C	A	D	A	B
			A	B	R	A	C	A	D	A
				A	B	R	A	C	A	D
					A	B	R	A	C	A
						A	B	R	A	C
							A	B	R	A
								A	B	R
									A	B
										A

Комбинаторика се у настави среће у многим земљама, негде експлицитно, негде имплицитно, са додатним циљем припреме ученика за садржаје из вероватноће и статистике. У нашој земљи такође се спроводе истраживања у вези са увођењем елемената комбинаторике, вероватноће и статистике и у млађе разреде основне школе (др Јасмина Милинковић, др Валерија Пинтер)

Основних формула у комбинаторици има мало – то су правило сабирања, правило множења, пермутације, варијације и комбинације са и без понављања. Ево, укратко, објашњења тих правила/формула:

1. правило сабирања

   ако нека акција A може да се оствари кроз било коју од активности A_1, ..., A_m а оне се могу остварити, редом, на n_1, …, n_m међусобно дисјунктних начина, онда је број могућности остварења акције A једнак $n_1 + … + n_m$.
2. правило множења

   ако се нека акција A може да оствари кроз низ активности A_1, ..., A_m које се могу остварити, наредом, на n_1, …, n_m међусобно дисјунктних начина, онда је број могућности остварења акције A једнак $n_1 \cdot … \cdot n_m$.
3. пермутације без понављања

   ако се у скупу налази n различитих елемената, онда је број начина да се сви елементи поређају у низ једнак n!

7. Od 12 zadataka, 4 su prvog nivoa, 4 drugog nivoa i 4 trećeg nivoa. Treba sastaviti kontrolni zadatak od 6 zadataka, od kojih je jedan džoker, i on je trećeg nivoa, a ostalih pet su 2 prvog nivoa, 2 drugog nivoa i jedan trećeg nivoa. Na koliko načina se od raspoloživih zadataka može napraviti kontrolni zadatak?
8. Na pripremama rukometne reprezentacije nalazi se 17 igrača i 3 golmana. Među njima je 13 dešnjaka i 7 levaka. Za svetsko prvenstvo treba izabrati ekipu od 14 ljudi. Na koliko načina se to može učiniti tako da među njima bude: a) 5 levorukih igrača, b) bar 2 golmana?
9. Koliko ima petocifrenih brojeva sa različitim ciframa, ako su brojevi sastavljeni od cifara: 0, 1, 2, 3 i 4?
10. Na hard-disku je 10 pesama. Koliko različitih CD-a možemo snimiti ako na svaki snimamo po 5 pesama?
11. U odeljenju su 4 odlična, 4 vrlodobra, 4 dobra i 8 učenika sa nedovoljnim uspehom. Na koliko načina se mogu rasporediti po dvoje u klupi da pored svakog odličnog i vrlodobrog učenika bude učenik sa nedovoljnim uspehom?
12. Na koliko načina se može razmestiti 25 učenika, od kojih je 13 dečaka i 12 devojčica, na 15 klupa tako da: a) ne sede dečak i devojčica zajedno, b) da trojica dečaka sede sa devojčicama a ostali dečaci sa

<u>РЕЗУЛТАТИ</u>
3. 8!/3!3!2!, 8!, 8!/3!1!1!1!1!1!, **4.** 4!3!3!, 6·4!3!3!, 10!, 10!/4!3!3! **8.** 8!/6!2! **9.** 19!/17!2! **10.** 2^8.

ZADACI POLAZNIKA SEMINARA

18. januar 2009.

1. U autobusu su na početnoj stanici bila 64 putnika. Na koliko načina oni mogu napuštati autobus do poslednje, devete stanice? (ako se ne računaju ulasci i izlasci novih putnika)
2. Na koliko načina se od 8 poštara mogu izabrati dvojica za rad u jednom reonu?
3. U neprovidnoj vreći nalazi se 6 belih, 5 crnih, 4 crvene i 3 zelene kuglice. Na slučajan način se bira 5 kuglica. Koliko ima slučajeva da su među njima 2 zelene? Koliko najmanje kuglica treba izvući da bi među njima sigurno bile 2 zelene?
4. Koliko ima trocifrenih brojeva koji imaju po 6 delilaca koji su svi prosti brojevi?
5. Na mp3-plejeru su 3 pesme Yu grupe, 5 pesama Parnog valjka i 4 pesme Riblje čorbe. Na koliko načina se može izabrati redosled pesama tako da se pesme iste grupe ne slušaju jedna za drugom?
6. Od 5 žutih, 7 crvenih i 8 plavih perlica treba nanizati na vrpcu po 4 perlice tako da od svake četiri dve budu iste boje, a da ne budu jedna do druge. Na koliko načina je to moguće uraditi?

4. пермутације са понављањем

    ако се у скупу налази n елемената, међу којима има истих и то, редом, $n_1, \ldots, n_m$, при чему је $n = n_1 + \ldots + n_m$, онда је број начина да се сви елементи поређају у низ једнак $n!/ n_1!\ldots n_m!$

5. варијације без понављања

    ако се у скупу налази n различитих елемената, онда је број начина да се неких k елемената поређају у низ једнак n!/(n-k)!

6. варијације са понављањем

    ако се у скупу налази n различитих елемената, онда је број начина да се формира низ од k елемента, који се могу понављати једнак n^k.

7. комбинације без понављања

    ако у скупу има n различитих елемената, онда је број начина да се од њих формира подскуп од неких k елемената једнак $n!/(n-k)!k!=\binom{n}{k}$.

8. комбинације са понављањем

    ако у скупу има n једнаких елемената, онда је број начина да се формира k подскупова, од којих неки могу бити и празни, једнак $\binom{n+k-1}{k-1}$.

На основу ових описа се закључује да су пермутације и варијације у вези са уређивањем елемената у низ, били они међусобно различити или не, и било да се користе сви расположиви елементи или само део њих. Комбинације се пак односе на бројеве различитих подскупова, где, дакле, редослед елемента није важан, него само то колико је елемената су у подскупу. Наведени називи су, као и сви називи уосталом, ствар конвенције, па их треба користити само ако је потпуно јасно о чему се ради. То је био разлог што је прошлогодишње предавање на ову тему имало наслов „*Перманентне пермутације комбинација у комбију и варијација у варијетеу*“ ☺ којим се илуструје став аутора да је у решавању задатака из комбинаторике битно сваки пут утврдити тачно шта се пребројава, уређени низови или подскупови, па на основу такве анализе добити и решење, него тражити да ученик каже да ли условима задатка одговарају пермутације или сл.

Такође, у току решавања задатка корисно је убацити извесне измене услова и објаснити до каквих измена у решењу то доводи. Другим речима, решавати задатак кроз активно размишљање.

Задатака из комбинаторике има бесконачно, па се копоставља питање како изабрати задатке у настави. Није једноставно ускладити расположиво време и многобројне задатке из других математичких дисциплина које треба објаснити ученицима. Стога је решење у додавању елемента комбинаторике и тамо где их наизглед

5. Који је коефицијент уз x^{12} у развоју израза: $(1 + x^3 + x^6)^{18}$?
6. На колико начина се реч АБРАКАДАБРА може прочитати ако се полази од горњег слова *А* и силази ка доњем слову *А*?

А
Б Б
Р Р Р
А А А А
К К К К К
А А А А А А
Д Д Д Д Д
А А А А
Б Б Б
Р Р
А

7. Дато је 6 тачака у равни од којих никоје 3 нису на истој правој. На колико начина се од тих тачака могу формирати два троугла?
8. Осам политичара се срело на добротворној вечери. Колико ће укупно руковања бити, ако се сваки само једном рукује са осталим политичарима?
9. Ученици треба да прочитају 20 страна за лектиру. Ако ученик хоће да то прочита за три дана, на колико начина може поделити текст у три дела, а да сваки дан прочита бар једну страну?
10. Киоск брзе хране има понуду од 8 додатака (салата, парадајз, лук, сенф, мајонез, урнебес, кисели краставчићи, павлака). На колико начина муштерија може да зачини своју пљескавицу?

ЈОШ НЕКОЛИКО ЗАДАТАКА

1. На колико начина се могу ставити три новчанице од 10 динара, две од 20 и једна од 50 у аутомат за кафу, да би се платиле три кафе од 40 динара?
2. Који је коефицијент уз x^{23} у развоју израза: $(1 + x^5 + x^9)^{100}$?
3. Декоратер треба да уреди полицу са 8 књига, од којих 3 имају црвене корице, 3 плаве, а 2 браон. Ако се претпостави да су наслови и величина књига небитни, на колико се начина књиге могу сложити? На колико начина се књиге могу сложити ако се сматра да су све различите? На колико начина се књиге могу сложити ако су црвене све три исте, а остале међусобно различите?
4. Четири Нигеријца, три Кинеза и три Грка стоје пред благајном и чекају да купе улазницу за Међународни сајам књига. На колико начина се могу поређати ако су Нигерijци први, Кинези за њима а Грци последњи у реду? Колико има могућих распореда ако су припадници истог народа увек заједно? Колико се уопште може формирати различитих распореда? Претпоставимо да је наишао Марсовац који мало слабије види тако да не разликује људе појединачно, а уочава само њихову боју коже. Са тачке гледишта Марсовца, на колико начина се тих десет смешних Земљана може поређати у ред?

нема. Ево неколико идеја на основу насумичног прегледања уџбеника из Математике за 7. разред (Завод за уџбенике, Београд), у коме експлицитно нема садржаја из комбинаторике.

Стр. 63. *Пример 4* – у питању је множење монома А, В и С датих изразима. Овде се уз утврђивање својстава комутативности и асоцијативности могу уметнути и питања из комбинаторике. Идеје: а) питати ученике колико различитих записа множења два од датих израза могу да напишу, б) питати ученике колико различитих записа множења сва три израза могу да запишу, в) питати ученике колико има различитих записа множења два од датих израза, ако се посматрају и случајеви кад се израз множи сам собом, тј. квадрира.

Стр. 81. *Задатак 1* – Треба попунити таблицу вредностима унутрашњих углова правилних многоуглова са 4, 3, 6, 9, 10 и 12 страница. Једно од поља је попуњено. Идеје: а) питати ученике на колико начина је могуће да задатак буде дат, б) питати ученике колико има начина да се задатак постави ако би се два поља унапред попунила, в) питати ученике на колико начина наставник може да прозове 5 ученика да свако од њих попуни по једно поље...

Стр. 144. *Слика 18* – на слици су дате две коцке, три квадрата, три круга, две шољице и два троугла (димензије у оквиру сваке врсте су различите). Идеје: а) питати ученике на колико начина се са слике могу изабрати три равне фигуре, б) питати ученике на колико начина се сви представљени објекти могу поређати у низ, в) питати ученике на колико начина се од датих објеката могу изабрати три најмањих димензија.

Решење.

а) скуп равних фигура има 8 елемената (три квадрата, три круга и два троугла), па ако треба изабрати нека три од тих елемената, редослед није важан, него само који су елементи изабрани. Ако би пак редослед био важан, онда би број начина био $8 \cdot 7 \cdot 6$, али како било који редослед три елемента чини исти скуп, онда се овај број умањује 3! пута, па је резултат $8 \cdot 7 \cdot 6 / 3!$. Тј. одговор је $\binom{8}{3}$. б) Овде је у питању редослед елемената који су сви међусобно различити (по врсти или по димензијама) тако да је одговор 12!. в) од сваке врсте, а имамо пет врста објеката, по један је најмањи, па је резултат $\binom{5}{3}$.

Како су оне могле бити распоређене по скечевима?

12. Водитељ има три госта, а 15 питања, умерисаних од 1 до 15. Гости А, Б и В на случајан начин бирају по пет питања. Колико има случајева у којима је гост А изабрао питања само са парним бројевима?
13. Водитељ има три госта, а 15 питања, нумерисаних од 1 до 15. Гости А, Б и В на случајан начин бирају по пет питања. На питања одговарају према редном броју питања. У колико случајева се може десити да А одговара на првих пет питања?
14. Водитељ има три госта, а 15 питања, нумерисаних од 1 до 15. Гости А, Б и В на случајан начин бирају по пет питања. Колико има случајева у којима ће гости Б и В одговарати наизменично?
15. Три госта и два глумца на крају играју валцер са плесачицама. Колико има различитих подела на парове?

РЕЗУЛТАТИ

1. 120^3, 2. $6 \cdot 120^3$, 3. има за неколико сезона 4. 30, 5. 5!, 6. 10, 7. 4, 8. 7!, 9. по садржају 5!, 10. 20, 11. 35, 12. 7!/5!2! 13. 252, 14. 12, 15. 5!

3. Ако је на почетку сезоне снимљено 30 скечева, да ли је то довољно за 52 емисије у току године, тако да се ни у једној емисији не понови пет истих скечева?
4. У једној емисији су пустили само две различите рекламе. На колико начина је то могло да се изведе?
5. На колико начина плесачице могу да се поређају једна до друге на подијуму?
6. Ако су две плесачице плавуше, а три црнке, на колико начина се могу поређати ако се само гледа боја косе?
7. На крају музичке нумере водитељ стане између две плесачице. На колико начина то може учинити?
8. На крају емисије водитељ, глумци и плесачице дефилују на сцени. На колико начина се могу поређати, ако су глумци обавезно један до другог?
9. Уобичајено је да две музичке нумере буду пародије познатих хитова, две музичке нумере су плесне тачке, а једна је хит месеца. Колико има начина да се изведе такав програм?
10. У сваком од скечева оба глумца учествују, и сваки има по три улоге. На колико различитих начина се могу смењивати те улоге, ако само гледамо који је глумац у питању?
11. У оквиру једне емисије један од глумаца је имао 8 улога у пет скечева, бар једну у сваком од скечева.

Перманентне пермутације комбинација у комбију и варијација у варијетеу

Комби: возач, сувозач, и два реда са по три седишта за путнике.

1. На колико начина је могуће распоредити путнике ако је само важно ко седи у ком реду?
2. На колико начина је могуће распоредити путнике ако је само важно ко седи у ком реду, а могуће је да на месту сувозача буде неко од путника, док се сувозач налази међу путницима?
3. На колико начина је могуће распоредити путнике ако је само важно ко седи у ком реду, и ако два путника такође имају дозволу да возе комби? На месту сувозача може да буде било ко од особа из возила.
4. На колико начина је могуће распоредити путнике ако је само важно ко седи у ком реду, и ако два путника такође имају дозволу да возе комби? На месту сувозача може да буде било ко од особа које имају дозволу да возе комби.
5. На колико начина је могуће распоредити путнике ако два путника желе да седе поред прозора?
6. На колико начина је могуће распоредити путнике ако два путника желе да седе један до другог?
7. На колико начина је могуће распоредити путнике ако два путника желе да седе на средњим седи-

штима у редовима од три седишта?

8. Ако три путника говоре енглески, два француски, а један путник руски, на колико начина разни језици могу да буду размештени у комбију?
9. Ако две особе, рачунајући и возача и сувозача имају рођендан истог дана, у колико случајева ће седети једна до друге?
10. Ако вожња дуго траје, колико разних подела на „будне“ и „спаваче“ може да буде?
11. Ако су неки путници понели ужину, а неки не, колико има могућих подела на оне који ће ући у продавницу на паркингу да нешто купе, ако претпоставимо да купују само они који нису понели ужину?
12. Ако три путника читају новине у току вожње, колико има распореда седења у односу на то ко чита новине, а ко не?
13. Ако у комбију имају само два примерка новина, а сви путници хоће да их прелистају, на колико начина се могу распоредити да би сви прегледали новине?
14. Ако комби има велика клизна врата са десне стране, на колико начина се могу распоредити путници у односу на то ко седи поред врата?
15. Ако троје путника има вокмен, како све могу путници бити распоређени, а да не седе два „вокмена“ један до другог?
16. Ако возач има кесицу бомбона и понуди путнике, колико има случајева кад ће само три путника узети по бомбону (бомбона има довољно за све)?
17. Ако сви путници знају да причају вицеве, на колико начина вицеви могу бити распоређени на „забављаче“, ако су испричана 3 вица?

18. Ако су двоје путника вегетеријанци у колико распореда седења ће бити у истом реду у комбију?
19. Ако троје путника има мобилни 064, а троје 063, у колико распореда седења ће сви са исте мреже седети у истом реду?
20. Ако међу особама у комбију пет на свакој паузи попуши по једну или две цигарете, а после одласка је на паркингу остало осам опушака, који су могући распореди броја попушених цигарета?

Резултати. 1. 20, 2. 140, 3. 420, 4. 120, 5. 288, 6. 144, 7. 48, 8. 60, 9. 6!+144, 10. 2^6, 11. 2^6-1, 12. 20, 13. 30, 14. 30, 15. 36, 16. 20, 18. 144+4!16, 19. 3!3!2.

Варијете „Петица“: Водитељ, пет плесачица, два глумца, гости. Програм траје 60 минута, а састоји се од 5 музичких нумера по два минута, пет скечева по 5 минута, разговора са гостима 20 минута и пет блокова реклама по минут.

1. Колико има различитих могућности емитовања снимљеног материјала за једну емисију, ако је разговор са гостима на крају програма, а на почетку се смењују – музика, скечеви, рекламе у на веденом редоследу?
2. Колико има различитих могућности емитовања снимљеног материјала за једну емисију, ако је разговор са гостима на крају програма, а на почетку се смењују – музика, скечеви, рекламе у произвољном редоследу?